P1 $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$

1

$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

a) En efecto:

- $\mathcal{B}$ es l.i: sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ tq

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l}\lambda_4 = 0\\ \Rightarrow \lambda_3 = 0\\ \Rightarrow \lambda_2 = 0\\ \Rightarrow \lambda_1 = 0.\end{array}$$

- $\mathcal{B}$ genera: sea $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. PDQ $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in \langle \mathcal{B} \rangle$.

En efecto, buscamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tq:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l}\lambda_4 = d \quad \text{de la 4ª ec.}\\ \Rightarrow \lambda_3 = c-d\\ \Rightarrow \lambda_2 = b-c\\ \Rightarrow \lambda_1 = a-b\end{array}$$

Con lo que

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + (b-c)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + (c-d)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

i.e $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Luego $\mathbb{R}^4 = \langle \mathcal{B} \rangle$

Así, $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}^4$

b) En efecto, vemos que por enunciado:

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \subseteq Im(T)$$

y además son l.i. (pues B es un conjunto l.i.
y TODO subconjunto de un conjunto l.i. es l.i.)

Luego sea $V = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

vemos que al ser $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$ un conjunto l.i. que genera V

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } V$$

Luego $\dim(V) = 2$. y como V es sev de $Im(T)$.

Luego $\dim(Im(T)) \geq \dim(V) = 2$ //

Por TNI y además

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) = 4 \quad (= \dim(\mathbb{R}^4))$$

$\Leftrightarrow$ $2n + r = 4$

Además, por (*) $n \geq 2$, luego:

$4 = 2n + r \geq 4 + r \Rightarrow r \leq 0$ luego: $r = 0$

Así: $4 = 2n \Rightarrow n = 2$.

Con esto: $\dim(Im(T)) = \dim(Ker(T)) = 2$.

y como $Im(T) \subseteq Ker(T)$, al final tenemos que

$Im(T) = Ker(T)$.

Luego, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de ambos.

Pues por enunciado es un conjunto li contenido en $Im(T)$ y es de tamaño 2, como $\dim(Im(T)) = 2$, debe ser base.

c) En efecto si existiera:

$Im(T) = Ker(T) \Rightarrow \dim(Im(T)) = \dim(Ker(T))$

Llamemos "d" a esta dimensión. Por TNI:

$\dim(Im(T)) + \dim(Ker(T)) = 3$

$\Leftrightarrow d + d = 3 \Leftrightarrow 2d = 3$ pero $d \in \mathbb{N}$ pues es una dimensión $\rightarrow\leftarrow$

Luego, tal T no existe ▨

P2) V e.v. sobre $\mathbb{R}$. $\dim(V) = n$, U sev de V $\dim(U) = n-1$ (4)

a) Sea $v \in V \setminus U$. PDQ $U \oplus \langle\{v\}\rangle = V$.

En efecto $U \cap \langle\{v\}\rangle = \{0\}$ pues:

$\boxed{\subseteq}$ Sea $w \in U \cap \langle\{v\}\rangle$. Como $w \in \langle\{v\}\rangle$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$w = \lambda v$. Si λ fuese distinto de cero:

$w \in U \Leftrightarrow \frac{w}{\lambda} \in U$ pues U es e.v.

$\Leftrightarrow \frac{\lambda v}{\lambda} \in U \Leftrightarrow v \in U$ $\rightarrow\!\leftarrow$ luego $\lambda = 0$.

$\boxed{\supseteq}$ Como U y $\langle\{v\}\rangle$ son ev's, necesariamente contienen a su 0 vectorial.

Ahora veamos que $U + \langle\{v\}\rangle = V$.

En efecto sea B base de U, como $\dim(U) = n-1$, B tiene $n-1$ elementos.

Además como $v \notin U$, $v \notin \langle B\rangle$. Esto es:

$B \cup \{v\}$ es l.i. pues si no lo fuera:

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tq $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n-1} b_{n-1} + \lambda_n v = 0$

Si $B = \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$ Exploremos los casos posibles:

- Si $\lambda_n = 0$: $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tq $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i b_i = 0$. Como B es base de U, es l.i., luego $\lambda_i = 0$ $\forall i$

- Si $\lambda_n \neq 0$ $v = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{-\lambda_i}{\lambda_n}\right) \cdot b_i$, en particular, $v \in \langle B\rangle$ $\rightarrow\!\leftarrow$

Luego, como $\{v\} \cup B$ es un cjto l.i. de tamaño n, es base de V (pues $\dim(V) = n$).

Esto es $V = U + \langle \{v\} \rangle$.

b) Sea $S \subseteq V$ sev tq $S \nsubseteq U$.

PDQ $S+U=V$. $\boxed{\supseteq}$ En efecto como $S \nsubseteq U$

$\exists s \in S$ tq $s \notin U$. Luego sea $v \in V$.

Por a) $\langle s \rangle \oplus U = V$. Luego $\exists u \in U, \lambda \in \mathbb{R}$ tq

$$v = \underbrace{\lambda s}_{\in S} + \underbrace{u}_{\in U} \Rightarrow v \in S+U$$

$\boxed{\subseteq}$ Sea $s+u \in S+U$. Como $s \in V$, $u \in V$ y V es e.v

$s+u \in V$ //.

Luego para calcular $\dim(S \cap U)$ ocupamos este resultado:

$$\dim(\underbrace{S+U}_{V}) = \dim(S) + \underbrace{\dim(U)}_{n-1} - \dim(U \cap S)$$

$\longmapsto n \longmapsto$

$$\Rightarrow \dim(U \cap S) = \dim(S) + n-1-n = \dim(S)-1$$

Meditar: ¿Por qué esto tiene sentido?

P3) Sean V, W ev's. $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base V
$A = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ base W.

Sea $T: V \longrightarrow W$ representada en estas bases por

$$M_{AB}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Vemos que $3v_1 + 2v_2 - v_3 \simeq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_B$

Como $M_{AB}(T)$ representa a T para A y B.
Entonces

$$T(3v_1 + 2v_2 - v_3) = M_{AB}(T) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}_A$$

Lo cual nos da las coordenadas buscadas.

b) Tenemos que $T(3v_1 + 2v_2 - v_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}_A$

Por definición, esto es que:

$$T(3v_1 + 2v_2 - v_3) = -2w_1 + 4w_3 + 5w_4 \quad //$$

c) Sea $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tq $M_{AB}(T) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^4$.

Tenemos que entonces $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ soluciona $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Resolvamos el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2c = 0 \\ -3c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c = 0 \; ; \; -1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0 \; ; \; a - 2b + c = 0$$

$$\Longrightarrow a = 0$$

②

Con ello $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

d) Tenemos por c) que el único vector "v" de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M_{AB}(T) \cdot v = 0 \quad \text{es} \quad v = 0 \in \mathbb{R}^3.$$

Luego como una T.L. está completamente representada por su matriz representante, tenemos que el único $\tilde{v} \in V$ tal que $T(v) = \vec{0}$ debe tener las coordenadas de v para la base B. Es decir

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{v} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = 0$$

y: $T(\tilde{v}) = M_{AB}(T) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_A$.

$$\Rightarrow T(\tilde{v}) = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + 0 \cdot w_4 = 0$$

$$\{0_V\} = \ker(T).$$

e) Idea: buscar base de $\mathrm{Im}(M_{AB}(T))$ (visto como sev. de $\mathbb{R}^4$ y "pasarnos" a ~~Im~~ $\mathrm{Im}(T)$ visto como sev de W).

Entonces sea $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(M_{AB}(T))$

Veamos que forma tiene: $\longrightarrow$ Hay un método para esto:

1) Calcular $M_{AB}(T) \cdot v$ para los $v \in B$, con B base del espacio de salida ($\mathbb{R}^3$) (ej. la canónica).

$$M_{AB}(T) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad M_{AB}(T) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; \quad M_{AB}(T) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego sea $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tq $M_{AB}(T) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

Como $M_{AB}(T) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \, M_{AB}(T) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \, M_{AB}(T) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \, M_{AB}(T) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

obtenemos: (B)

$$M_{AB}(T)\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\-2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in Im(M_{AB}(T))$$

Luego $\hat{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\-2\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix} \right\}$ genera $Im(M_{AB}(T))$

Además como $\dim(\ker(M_{AB}(T))) = 0$
por TNI
$$\dim(Im(M_{AB}(T))) = 3.$$

Luego $\hat{B}$ es base de $Im(M_{AB}(T)) \leq \mathbb{R}^3$

Así el conjunto:

$$\{ w_1 - w_2 + 2w_3 + 3w_4 \;,\; -3w_1 + w_2 + w_3 - 2w_4 \;,\; w_1 - w_2 + 4w_3 \}$$

es base de $Im(T)$ (como sev. de W).

8

P4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) • A es triangular superior y tiene diagonal sin ceros, luego, A es invertible

• B tiene una fila de ceros, luego, no es invertible.

b) Para responder esto, recordemos:

Una transformación lineal es biyectiva si y sólo si su matriz representante es invertible

Luego, no importa qué bases estén tomándose en cuenta, A representa una función biyectiva y B no, luego no pueden representar la misma función nunca.

c) Veamos $\ker(T_B)$ sea $v \in \mathbb{R}^4$ tq $Bv = 0$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ si $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$: $b = -d$, $c = -d$ $\quad 3a + 3(-d) + (-d) + d$

$\Rightarrow a = d$

$\Rightarrow v \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Luego si B representa a T para bases B_1 y B_2 en los espacios respectivos:

y $B_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

$\ker(T) = \{b_1 - b_2 - b_3 + b_4\}$ $\rightarrow$ como subconjunto del espacio de salida.

Si además $B_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, estudiemos $\mathrm{Im}(T_B)$.

Coordenadas:

$T_B(b_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2}$; $T_B(b_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2}$; $T(b_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2}$; $T(b_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Esto calculando $B \cdot e_i$ con e_i el i-ésimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^4$).

Esto es:

$T_B(b_1) = 3a_1$; $T_B(b_2) = 3a_1 + 2a_2 + a_4$; $T_B(b_3) = a_1 - a_2$

$T_B(b_4) = a_1 + a_2 + a_4$.

Luego:

$Im(T_B) = \langle \{3a_1, 3a_1 + 2a_2 + a_4, a_1 - a_2, a_1 + a_2 + a_4\} \rangle$

Pero por TNI $\dim(Im(T_B)) = 3$ $(4-1)$

Luego hay un elemento que sobra. Encontrémoslo.

Notemos que

$3a_1 + 2a_2 + a_4 = a_1 + a_2 + a_4 - (a_1 - a_2) + 3a_1$

$\Rightarrow \{a_1 + a_2 + a_4, a_1 - a_2, 3a_1\}$ es base de $Im(T_B)$