P2 Comencemos con B_1:

$$B_1 - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -8-\lambda & 5 \\ 5 & -10 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B_1 - \lambda I) = (2-\lambda)\left[-(8+\lambda)(7-\lambda) + 50\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[-(-\lambda^2 - \lambda + 56) + 50\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[\lambda^2 + \lambda - 56 + 50\right] = (2-\lambda)(\lambda^2+\lambda-6)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda+3)(\lambda-2)$$

$\Rightarrow$ $\lambda \in \{2, -3\}$ son los vp's de B_1

Ahora para B_2:

$$B_2 - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -7-\lambda & 5 \\ 5 & -10 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B_2 - \lambda I) = (3-\lambda)\left[-(7+\lambda)(8-\lambda) + 50\right]$$

$$= (3-\lambda)\left(-(-\lambda^2 + \lambda + 56) + 50\right)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 56 + 50) = (3-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6)$$

$= (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2) \Rightarrow \lambda \in \{-2, 3\}$ son los vp's de B_2

b) Hay 2 maneras de hacer esto:

1) Encontrar los subespacios propios y ver que son iguales (Propuesto).

2) Usar "Magia DIM".

Para esto, notemos que:

$$\left[B_2 = B_1 + I \right]$$

Con esto vemos que:

$(*)\ B_2 - (-2)\cdot I = B_1 + I + 2I = B_1 + 3I = B_1 - (-3)I$

Similarmente:

$(**)\ B_2 - 3I = B_1 + I - 3I = B_1 - 2I.$:O

Con ello, llamemos:

A^1_2, A^1_{-3} a los espacios propios de B_1 para sus vp's 2 y -3 respectivamente

A^2_{-2}, A^2_3 a lo mismo para B_2 y sus vp's.

Para encontrar A^1_2 debemos resolver.

$$(B_1 - 2I)v = 0$$

y para encontrar A^2_3 debemos resolver:

$$(B_2 - 3I)v = 0$$

Pero de $(**)$, estas dos matrices son iguales, luego, es claro que ambas ecuaciones tendrán el mismo espacio solución.

Luego: $\left[A^1_2 = A^2_3\right]$

Siguiendo el mismo razonamiento para

$B_1 - (-3)I$ y $B_2 - (-2)I$

Obtendremos de $(*)$. que

$$\left[A^1_{-3} = A^2_{-2}\right]$$

Con lo que probamos lo pedido

P2 a) Corroboremos ortogonalidad: → Para esto, debemos ver que $\forall u, v$* en el cjto $\langle u, v\rangle = 0$

* con $u \neq v$

- $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle = 1\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1$

$= -2 + 1 + 1 + 0 = 0$

- $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\1\\3\\-6\end{pmatrix} \right\rangle = 1\cdot(-4) + 1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 0\cdot 6$

$= -4 + 1 + 3 + 0 = 0$

- $\left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\1\\3\\-6\end{pmatrix} \right\rangle = (-2)\cdot(-4) + 1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot(-6)$

$= 8 + 1 + 3 - 12 = 0$

Luego, el cjto es ortogonal

b) Corroboremos ortogonalidad:

- $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \right\rangle = 1\cdot 0 + 2\cdot 4 = 0 + 8 = 8 \neq 0$

Así, de partida el cjto no es ortogonal → ocupamos G-S.

TIP: Al ocupar G-S, comiencen con los elementos que tengan más ceros.

Comencemos con $w_1 = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \longmapsto v_1 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|}$

$= \dfrac{\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{0^2+4^2}} = \dfrac{\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Ahora $u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \mapsto w_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, v_1 \right\rangle \cdot v_1$

$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - (1\cdot 0 + 2\cdot 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

y como ya tiene norma 1: $v_2 = w_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Finalmente $u_3 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mapsto w_3 = u_3 - \langle u_3, v_1\rangle \cdot v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle \cdot v_2$

$= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - (1\cdot 0 + 0 \cdot 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - (1\cdot 1 + 1\cdot 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ → como tiene norma 0 no podemos dividir por su norma.

Luego $\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\}$ es el cjto pedido

c) Revisemos ortogonalidad:

- $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = 1\cdot 0 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-1) = 0 + 8 - 3 \neq 0$

⇒ No es ortogonal → usamos G-S

Comenzamos con $w_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ → el con más ceros.

$\|w_1\| = 1$ así que $v_1 = w_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Luego $u_2 = \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$ → El segundo con más ceros.

$w_2 = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} - (0\cdot 0 + 4\cdot 0 + (-1)\cdot 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$$

Luego $v_2 = \dfrac{w_2}{\|w_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{0^2+4^2+0^2}}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Finalmente: $u_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \mapsto w_3 = u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - (1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - (1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 8\cdot 0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$ → YA tiene norma 1

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ es conjunto obtenido de G-S.

Nota: para comprender lo útil de partir con los vectores de más ceros queda propuesto seguir el sgte orden:

1° $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; 2° $\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$; 3° $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Lo cual deja: $\left\{ \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{14}}{14}\\ \frac{\sqrt{14}}{7}\\ \frac{3\sqrt{14}}{14}\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}\frac{5\sqrt{2982}}{2982}\\ -\frac{23\sqrt{2982}}{1491}\\ \frac{29\sqrt{2982}}{2982}\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}-\frac{14\sqrt{213}}{213}\\ \frac{\sqrt{213}}{213}\\ \frac{4\sqrt{213}}{213}\end{pmatrix} \right\}$

¿Por qué ambos conjuntos son respuestas correctas?

El que responda por correo se gana un chocolate.

P1] PDQ: A no invertible $\iff \lambda = 0$ es vp de A.

Ocuparemos sólo equivalencias:

A no invertible $\iff \det(A) = 0 \iff \det(A - 0\cdot I) = 0$

$\iff 0$ es vp de A.

Con lo que probamos lo pedido.

P2] $E, F \in M_{7\times 7}(\mathbb{R})$

- vp's de E: $\{\rho_1, \rho_2\}$
- vp's de F: $\{\delta_1, \delta_2\}$

Multiplicidades geométricas cumplen:
- $\gamma_E(\rho_1) = \gamma_F(\delta_1) = 5$
- $\gamma_E(\rho_2) = \gamma_F(\delta_2) = 2$

a) En efecto, notemos que:

$$\sum_{\lambda \text{ vp de } E} \gamma_E(\lambda) = \gamma_E(\rho_1) + \gamma_E(\rho_2) = 7 = n$$

y:

$$\sum_{\lambda \text{ vp de } F} \gamma_F(\lambda) = \gamma_F(\delta_1) + \gamma_F(\delta_2) = 7 = n$$

y esto (que la suma de todas las mult. geométricas sea n) es equivalente a ser diagonalizable

$\Rightarrow$ Tanto E como F son diagonalizables //

b) Ahora consideramos

(2)

$$\underbrace{V_{\rho_1}^{E}} = V_{\delta_1}^{F} \quad y \quad V_{\rho_2}^{E} = V_{\delta_2}^{F}$$

↳ Espacio propio de E asociado a su $\vec{vp}$ $\lambda = \rho_1$.

Con esto como E y F son diagonalizables.

Sea $\{v_1, \dots, v_5\}$ base de $V_{\rho_1}^{E}$ (y $V_{\delta_1}^{F}$)

y $\{v_6, v_7\}$ base de $V_{\rho_2}^{E}$ (y $V_{\delta_2}^{F}$)

Tenemos:

$$E = \underbrace{(v_1 | \dots | v_7)}_{P^{*}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \rho_1 & & & & & & 0 \\ & \rho_1 & & & & & \\ & & \rho_1 & & & & \\ & & & \rho_1 & & & \\ & & & & \rho_1 & & \\ & & & & & \rho_2 & \\ 0 & & & & & & \rho_2 \end{pmatrix}}_{D_E} \cdot \underbrace{(v_1 | \dots | v_7)^{-1}}_{P^{-1 *}}$$

y a su vez

$$F = \underbrace{(v_1 | \dots | v_7)}_{P^{*}} \underbrace{\begin{pmatrix} \delta_1 & & & & & & 0 \\ & \delta_1 & & & & & \\ & & \delta_1 & & & & \\ & & & \delta_1 & & & \\ & & & & \delta_1 & & \\ & & & & & \delta_2 & \\ 0 & & & & & & \delta_2 \end{pmatrix}}_{D_F} \underbrace{(v_1 | \dots | v_7)^{-1}}_{P^{-1 *}}$$

* Es el mismo "P" ⟹ Es el mismo "P^{-1}"

Luego, con esto:

$$E \cdot F = P D_E \underbrace{\cancel{P^{-1} \cdot P}}_{I} D_F \cdot P^{-1} = P \cdot D_E \cdot D_F \cdot P^{-1}$$

$$= P D_F \cdot D_E P^{-1} = P D_F \, I \, D_E P^{-1} = P D_F P^{-1} P D_E P^{-1}$$

$$= F \cdot E$$

↓ Las diagonales conmutan entre sí

Con lo que probamos lo pedido ∎

P3 $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ simétrica.

$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$. $u = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$

vp's de A.

a) Para esta pregunta (y el resto del auxiliar) usaremos fuertemente la sgte propiedad CLAVE:

(☆) Sea A matriz simétrica real ; $u, v \in \mathbb{R}^n$ vectores propios de A asociados a valores propios distintos, entonces $\langle u, v\rangle = 0$ es decir, u y v son ortogonales.

Ahora, comencemos con las multiplicidades algebraicas:

Como $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)^1$

obtenemos:
- $\alpha_A(1) = 2$
- $\alpha_A(3) = 1$

y como A es real simétrica, es diagonalizable. Por lo tanto:

$\forall \lambda$ valor propio de A: $\gamma_A(\lambda) = \alpha_A(\lambda)$

donde $\gamma_A(\lambda)$ es la multiplicidad geométrica.

Con ello:
- $\gamma_A(1) = 2$
- $\gamma_A(3) = 1$

b) Ocupemos (☆), veamos si $\langle u, v\rangle = 0$. Si no lo es, son del mismo valor propio. En efecto:

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 6+1+2 = 9$$

$\Rightarrow$ u, v ambos son vp's de $\lambda = 1$ (pues no podrían ser ambos de $\lambda = 3$ pues $\gamma_A(3) = 1$)

c) Usaremos de nuevo (A). Queremos $w \in \mathbb{R}^3$ ④

tq $\langle w, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\rangle = 0$ y $\langle w, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\rangle = 0$.

Si $w = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, vemos que

- $\langle w, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\rangle = 0 \iff 2a+b+2c=0$ ①

- $\langle w, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\rangle = 0 \iff 3a+b+c = 0$ ②

Si hacemos ② - ①:

$a - c = 0 \Rightarrow a = c$ ③

Luego, si aplico ③ a ①

$-4a = b \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ cumple lo pedido.

Confirmemos:

- $\langle \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}\rangle = 2\cdot 1 + 1\cdot(-4) + 2\cdot 1 = 0$

- $\langle \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}\rangle = 3\cdot 1 + 1\cdot(-4) + 1\cdot 1 = 0$

$\Rightarrow$ obtenemos lo pedido.