MA1102 Álgebra lineal
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 11: Ortogonalidad y criterios de diagonalizabilidad.

27 de noviembre de 2023

P1. Soy como tú, tú eres igual Sean las siguientes matrices:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 5 \\ 5 & -10 & 7 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 5 \\ 5 & -10 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores propios de B_1 y B_2

b) Muestre que ambas matrices tienen los mismos subespacios propios y determine si son o no diagonalizables.

P2. Comprender más. Determine si los siguientes conjuntos son ortogonales. De no serlo, aplíqueles el algoritmo de Gram-Schmidt.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

P3. Sin matriz? Fasil. Sea A matriz **simétrica** real de 3×3 con polinomio caracteristico $P(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$. Si además tenemos que:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son vectores propios de A, entonces:

a) Encuentre las multiplicidades algebráicas y geométricas de los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$.

b) Muestre que tanto u como v son vectores propios asociados al valor propio 1.

c) Encuentre un vector propio w asociado al valor propio 3.

P4. Complejo lo tuyo Sean E y F matrices de 7×7. Sean ρ_1, ρ_2 los valores propios de E y δ_1, δ_2 los valores propios de F, tales que sus multiplicidades geométricas cumplen $\gamma_E(\rho_1) = \gamma_F(\delta_1) = 5$ y $\gamma_E(\rho_2) = \gamma_F(\delta_2) = 2$.

a) ¿Son diagonalizables E y F? Justifique.

b) Muestre que si E y F tienen los mismos sub-espacios propios, entonces $EF = FE$.