

Para Axioma #8 lineal

P1) Queremos probar primero $r(AB) \leq r(A)$.

Si $A \in M_{p \times s}$, $B \in M_{s \times q}$ $AB \in M_{p \times q}$:

$r(AB)$ es el n° de columnas l.i. máximo de AB , vamos cómo hacer estas columnas:

Sea la i -ésima columna de AB :

$$(AB)_{:,i} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot \bar{b}_{1i} + a_{12} \cdot \bar{b}_{2i} + \dots + a_{1s} \cdot \bar{b}_{si} \\ a_{21} \cdot \bar{b}_{1i} + a_{22} \cdot \bar{b}_{2i} + \dots + a_{2s} \cdot \bar{b}_{si} \\ \vdots \\ a_{p1} \cdot \bar{b}_{1i} + a_{p2} \cdot \bar{b}_{2i} + \dots + a_{ps} \cdot \bar{b}_{si} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{b}_{1i} \cdot \underline{A_{:,1}} + \bar{b}_{2i} \cdot \underline{A_{:,2}} + \dots + \bar{b}_{si} \cdot \underline{A_{:,s}} \end{pmatrix}$$

Es decir: toda columna de AB es una combinación lineal de columnas de A .

Con ello:

$\{ \text{columnas de } AB \} \subseteq \{ \text{columnas de } A \}$

$$\Rightarrow \langle \{ \text{columnas de } AB \} \rangle \subseteq \langle \{ \text{columnas de } A \} \rangle$$

$$\text{Así: } \dim(\langle \{ \text{columnas de } AB \} \rangle) \leq \dim(\langle \{ \text{columnas de } A \} \rangle)$$

$$\Rightarrow r(AB) \leq r(A) //$$

Para probar $r(AB) \leq r(B)$ basta notar

$$r(AB) = r((AB)^T) = r(B^T A^T) \leq r(B^T) = r(B)$$

$$\text{Con lo que } r(AB) \leq \min(r(A), r(B)) //$$

$$P2 \quad \text{Sea } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{Sabemos que}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \cdot a_{k1} \cdot \det(A^{k1})$$

Con ello aplicando esta def. llegamos:

$$\left[\det(A) = a \cdot \det(A^{11}) - d \det(A^{21}) + g \det(A^{31}) \right] (*)$$

$$j: \quad A^{11} = \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} \quad A^{21} = \begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} \quad A^{31} = \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ A sin 1ª fila ni 1ª columna $\hookrightarrow$ A sin 2ª fila ni 1ª columna $\hookrightarrow$ A sin 3ª fila ni 1ª columna.

Ocupando que:

$$\left[\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \right]$$

Determinante de matriz de 2×2 .

en la fórmula (*) obtenemos:

$$\det(A) = a(ei - fh) - d(bi - ch) + g(bf - ce)$$

Con lo que se obtiene la fórmula pedida.

P3

Demostremos que: si $A \in M_{p \times p}$ de rango r
entonces: matriz identidad de $r \times r$

$$H_A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrices de ceros de
tamaño tal que H_A sea
de $p \times p$.

Ocupemos esto para
resolver la pregunta

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Escalonémosla para ver su rango:

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \rightarrow r(A) = 3$

$\Rightarrow H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r(B) = 2$

$\Rightarrow H_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} \text{Jan} \\ 3 \end{matrix} \right.$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 3 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r(C) = 2$

$\Rightarrow H_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

P4 Problemas por inducción.

Caso base: $n=3$. En este caso A tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_0 \\ 1 & 0 & -d_1 \\ 0 & 1 & -d_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -d_0 \\ 1 & -\lambda & -d_1 \\ 0 & 1 & -d_2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = -\lambda((- \lambda)(- \lambda - d_2) - (1)(-d_1)) \\ = 1 \cdot (0 \cdot (-d_2 - \lambda) - (-d_0) \cdot 1)$$

$$= -\lambda[\lambda^2 + d_2\lambda + d_1] - d_0$$

$$= -\lambda^3 - d_2\lambda^2 - d_1\lambda - d_0$$

$$= (-1)^3 \cdot \left[\sum_{k=0}^2 d_k \cdot \lambda^k + \lambda^3 \right] \quad \checkmark$$

Supongamos se tiene para $n-1$, probémoslo para n .

Ahora:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -d_0 \\ 1 & \dots & 0 & -d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -d_{n-1} \end{pmatrix}$$

Queremos usar la hipótesis, y para ello nos fijaremos en el subbloque $\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

Para ello:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & -d_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & -d_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\lambda & -d_{n-1} \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & -d_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & -d_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\lambda & -d_{n-1} \end{pmatrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{Notando que los} \\ \text{índices de los} \\ \text{els están "cambios"} \end{array}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = -\lambda \cdot \det(\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix}) + (-1)^{n+1} \cdot (-d_0).$$

$$y: \det(\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix}) = (-1)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-2} d_{k+1} \cdot \lambda^k + \lambda^{n-1} \right)$$

Por hipótesis inductiva

Con ello:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda \left[(-1)^{n-1} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-2} a_{k+1} \cdot \lambda^k + \lambda^{n-1} \right) + (-1)^{n+2} (a_0) \right]$$

$$= \left[(-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} a_{k+1} \cdot \lambda^{k+1} + \lambda^n \right] + (-1)^n a_0$$

$$= (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \lambda^k + \lambda^n + a_0 \right)$$

↪ cambio de índice

$$= (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k + \lambda^n \right)$$

Con lo que
se prueba lo pedido.