Pauta Auxiliar #7 Lineal

P1 a) En efecto, sean $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

y sea $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(A+\lambda B) = \begin{pmatrix} a+\lambda e & b+\lambda f \\ c+\lambda g & d+\lambda h \end{pmatrix} \text{, Luego:}$$

$$T(A+\lambda B) := (a+\lambda e + b+\lambda f + c+\lambda g) + (a+\lambda e - (d+\lambda h))x$$
$$+ (b+\lambda f + c+\lambda g + d+\lambda h)x^2$$

$$= [a+b+c + (a-d)x + (b+c+d)x^2]$$
$$+\lambda[(e+f+g) + (e-h)x + (f+g+h)x^2]$$

$= T(A) + \lambda T(B)$ con lo que T es lineal //.

b) Ker(T): sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Ker(T)$:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \; (= 0 + 0\cdot x + 0x^2)$$
$$\shortparallel$$
$$(a+b+c) + (a-d)\cdot x + (b+c+d)\cdot x^2$$

Aplicamos criterio de igualdad de polinomios $\left(\begin{matrix}\text{monomio a} \\ \text{monomio}\end{matrix}\right)$

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} a+b+c & = 0 \\ a-d & = 0 \\ b+c+d & = 0 \end{matrix}\right\}}_{\text{sistema lineal :D}} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \rightarrow \left(\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} b+c+d = 0 \\ a-d = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a = d \\ b = -c-d \end{matrix}$$

$$\Rightarrow M \in Ker(T) \Rightarrow M = \begin{pmatrix} d & -c-d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Veamos que este conjunto es base del $\ker(T)$. Ya vimos que es generador, falta ver que es l.i. En efecto, sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \; //$$

Con ello $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es la base buscada.

$\operatorname{Im}(T)$. Sea $p(x) = \alpha x^2 + \varepsilon x + \delta \in \operatorname{Im}(T)$

Queremos ver qué valores pueden tomar $\alpha, \varepsilon, \delta$.

Para esto si encontramos la matriz representante de T de la base canónica de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ a la base canónica de $P_2(\mathbb{R})$* bastaría resolver el sistema

$$\left[M \cdot x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \varepsilon \\ \delta \end{pmatrix} \right]$$

* ¿Por qué quiero la de las bases canónicas?

Para esto, necesitamos recordar:

La matriz representante entre bases canónicas de una T.L. es "fácil" de encontrar (si conozco T explícitamente).

Esto pues si escribimos "vectorialmente" (i.e, en $\mathbb{R}^n$) la acción de T:

$$M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-d \\ b+c+d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Que, si se dan cuenta, es la matriz que ocupamos para el sist. homogéneo que resolvimos al buscar el ker. :o

M es la matriz representante de T para las bases canónicas.

Luego, resolvamos el sistema antes mencionado:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \to 1 \\ \to x \\ \to x^2 \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & \alpha-\varepsilon \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \delta \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & \alpha-\varepsilon \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta-\alpha+\varepsilon \end{array}\right) \to$$ Estamos buscando valores para que este sist. tenga solución.

$$\Rightarrow \delta - \alpha + \varepsilon = 0 \Rightarrow \alpha = \delta + \varepsilon.$$

- Luego $p(x)$ es de la forma:

$$(\delta+\varepsilon) + \varepsilon x + \delta x^2 = \delta(x^2+1) + \varepsilon(x+1)$$

$\Rightarrow \{x+1, x^2+1\}$ genera $Im(T)$

y por TNI: $\dim(Im(T)) = \underset{\dim(M_{2\times 2})}{4} - \underset{\dim(Ker(T))}{2} = 2$

Luego $[\{x^2+1, x+1\}]$ es base de $Im(T)$.

NOTA IMPORTANTE: en general puede ser que al buscar bases para $Im(T)$ y $Ker(T)$ les queden bases de espacios en $\mathbb{R}^n$. (de la representación "vectorial" de sus elementos verdaderos).

Recordar SIEMPRE que: $\alpha + \beta x + (\alpha+\beta)x^2$

- $Ker(T) \subseteq$ espacio de salida
- $Im(T) \subseteq$ espacio de llegada.

Por lo que sus bases deben ser elementos en dichos espacios SIEMPRE

Otra forma es buscar el generado por

$$\left\{ \underset{1+x}{T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{1+x^2}{T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{1+x^2}{T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{-x+x^2}{T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

y tomar una base de ese espacio.

c) Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$. $\gamma = \{1+x, 1-x, x^2\}$

Queremos escribirlo en coordenadas γ, es decir

Encontrar $\alpha, \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ tq

$$\left[p(x) = \alpha(x+1) + \varepsilon(x-1) + \delta(x^2) \right]$$

y en ese caso: $[p(x)]_\gamma = \begin{pmatrix} \alpha \\ \varepsilon \\ \delta \end{pmatrix}$. $\longrightarrow$ Notación.

Entonces desarrollemos esta escritura de $p(x)$ y copiemos igualdad monomio a monomio:

$$p(x) = \delta \cdot x^2 + (\alpha+\varepsilon)x + (\alpha-\varepsilon)\cdot 1$$

$$\parallel$$

$$ax^2 + bx + c \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta = a \\ \alpha+\varepsilon = b \\ \alpha-\varepsilon = c \end{array} \right\} \text{ Sistema Lineal :D}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \varepsilon & \delta \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \end{array}\right) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \varepsilon & \delta \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 0 & b+c \end{array}\right) \end{array}.$$

$\Rightarrow$ i) $\delta = a$

ii) $\alpha + \varepsilon = b$

iii) $2\alpha = b + c \Rightarrow \alpha = \frac{b+c}{2}$

$\overset{ii)}{\Rightarrow} \frac{b+c}{2} + \varepsilon = b \Rightarrow \frac{b-c}{2} = \varepsilon$ //

$$\Rightarrow \left[[ax^2 + bx + c]_\gamma = \begin{pmatrix} \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \\ a \end{pmatrix} \right] \rightarrow \text{Escritura en coordenadas } \gamma.$$

d) Misma idea anterior. Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$.

Queremos encontrar: $\alpha, \delta, \varepsilon, \sigma \in \mathbb{R}$ tq:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha+\delta & \delta+\varepsilon+\sigma \\ \sigma & \varepsilon \end{pmatrix}$$ Es decir, tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\delta = a \\ \delta+\varepsilon+\sigma = b \\ \sigma = c \\ \varepsilon = d \end{array}\right\} \text{Sistema lineal (!)} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} \alpha & \delta & \varepsilon & \sigma & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \end{array} \to \text{Ya está "escalonado"}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \varepsilon = d \\ \sigma = c \end{array} ;\ b = \delta + \varepsilon + \sigma = \delta + d + c$$

$$\Rightarrow \delta = b - d - c.$$

$$\alpha = a - \delta = a - b + c + d$$

$$\Rightarrow \left[\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{\beta} = \begin{pmatrix} a-b+c+d \\ b-c-d \\ d \\ c \end{pmatrix} \right]$$

e) Para calcular (en general) una matriz representante "complicada" hay una receta.

1.- Hacer el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M_{2\times2}\ \beta \arrow[r, dashed, "T"] \arrow[d] & P_2(\mathbb{R})\ \gamma \\ M_{2\times2}\ \mathcal{C}_4 \arrow[r, "T"'] & P_2(\mathbb{R})\ \mathcal{C}_3 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Lo que tengo

Lo que quiero tener.

La manera de lograrlo

Idea: hacer el trabajo de la flecha azul (pasar por T de β a γ) en 3 pasos

1. Pasar de β a $\mathcal{C}_4$ (base canónica de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$).
2. Pasar por T de $\mathcal{C}_4$ a $\mathcal{C}_3$ (base canónica de $P_2(\mathbb{R})$)
3. Pasar de $\mathcal{C}_3$ a γ.

Notemos que ② ya está cubierto, y que ③ está más o menos cubierto, pues:

por c) ya sabemos pasar de γ a $\mathcal{C}_3$.

Falta encontrar la representación matricial:

Sabemos que:

$$[ax^2+bx+c]_\gamma = \begin{pmatrix} \frac{b+c}{2} \\ \frac{b-c}{2} \\ a \end{pmatrix} \begin{matrix} \to (1+x) \\ \to (1-x) \\ \to x^2 \end{matrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nota importante. La matriz de pasaje de una base canónica a una base cualquiera del mismo espacio es fácil de encontrar.

La matriz está dada por:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → también se basa en encontrar descomposiciones y escribir matrices con vect. por columna.

Para ①, tenemos como hacer el inverso, entonces la idea sería:

1.1 encontrar matriz de paso de $\mathcal{C}_4$ a β

1.2 invertirla.

Por esto, pasarse de base cualquiera a canónica es difícil (tiene más pasos).

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_b = \begin{pmatrix} a-b+c+d \\ b-c-d \\ d \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ para $\mathcal{C}_4$ a β.

$\Rightarrow$ M_2^{-1} para de β a $\mathcal{C}_4$.

Luego podemos expresar la matriz buscada como un producto matricial mediante:

$$M_{\gamma\beta}(T) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{1}$$

f) Para la otra forma de encontrar la matriz representante la idea es:

1. Calcular $Tb \ \forall b \in \beta$ → base del esp. de salida.
2. Expresar dichos Tb en base γ → base del esp. de llegada.
3. Escribir como matriz de vectores por columna.

(1) $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1+x$; $T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2+x+x^2$

$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1-x+2x^2$; $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2+2x^2$

(2)
- $1+x = 1\cdot(1+x) + 0(1-x) + 0\cdot x^2 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $2+x+x^2 = \frac{3}{2}(1+x) + \frac{1}{2}(1-x) + 1x^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $1-x+2x^2 = 0(1+x) + 1(1-x) + 2\cdot x^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $2+2x^2 = 1(1+x) + 1(1-x) + 2\cdot x^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3)

$$\longrightarrow M_{\gamma\beta}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

P2) Sea $B = \{b_1, b_2, b_3\} \longrightarrow |B| = 3$ por ser base de $\mathbb{R}^3$.

Tenemos que

$Tb_1 \in \langle\{b_1\}\rangle$; $Tb_2 \in \langle\{b_2\}\rangle$; $Tb_3 \in \langle\{b_3\}\rangle$

esto es $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$Tb_1 = \lambda_1 \cdot b_1$; $Tb_2 = \lambda_2 \cdot b_2$; $Tb_3 = \lambda_3 \cdot b_3$

Esto por def de vivir en el generado

Luego sea $b \in \mathbb{R}^3$; $b = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$

tenemos que : $[b]_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

y $Tb = T(\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3) = \alpha T b_1 + \beta T b_2 + \gamma T b_3$

$= \alpha \lambda_1 b_1 + \beta \lambda_2 b_2 + \gamma \lambda_3 b_3$.

$\Rightarrow [Tb]_B = \begin{pmatrix} \alpha \lambda_1 \\ \beta \lambda_2 \\ \gamma \lambda_3 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Es decir, $M_{BB}(T)$ es una matriz que pondera por fila al multiplicarse por la izq.

$\Longrightarrow M_{BB}(T)$ es diagonal

$\Rightarrow M_{BB}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ //

[73] a) Tenemos que

Rango (A) = máximo de filas o columnas* l.i. de A.

Luego, tenemos que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -29 & 8 & 30 & 19 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

sí o sí Rango (A) ≤ 2. (y ≥ 1 claramente).

Luego basta ver si tiene 2 columnas l.i.

En efecto: 1ª y 4ª son l.i.

Luego Rango (A) = 2

* Nota: con esto Rango (A) = Rango (A^T). $\forall A$.

b) 2 maneras de verlo:

- Escoger 2 columnas l.i. de A (pues Im (T) siempre es el generado por las columnas de su representante).
- Notar que Im (A) = $\mathbb{R}^2$ y tomar cualquier base de $\mathbb{R}^2$