Pauta Aux #4 Lineal

P1 D diagonal con $\{d_i\}_{i=1}^n$ todos distintos

a) Sea $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tq que $MD = DM$.

Veamos que M es diagonal. En efecto, sea $i \neq j$ y sea $m = M_{ij}$. Vemos que:

$MD = DM \Rightarrow (MD)_{ij} = (DM)_{ij}$ por def de igualdad de matrices.

y vemos que:

$$(MD)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} \cdot D_{kj}$$

pero $D_{kj} = 0$ para $k \neq j$, es decir, sólo sobrevive el término $k = j$

$$= M_{ij} \cdot D_{jj} = m \cdot d_j$$

A su vez, similarmente:

$$(DM)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} D_{ik} \cdot M_{kj}$$

sólo sobrevive el término $k = i$

$$= D_{ii} \cdot M_{ij} = d_i \cdot m$$

De esto, deducimos: $m \cdot d_i = m \cdot d_j$

y esto $\forall i, j$ distintos. De aquí se obtiene que $m = 0$

Así se obtiene lo pedido

b) Recordemos que las diagonales conmutan para el producto. Así, como $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son ambas diagonales, obtenemos:

$$(S^{-1}AS)(S^{-1}BS) = (S^{-1}BS)(S^{-1}AS)$$

$$\Leftrightarrow S^{-1}A\underbrace{(SS^{-1})}_{I}BS = S^{-1}B\underbrace{(SS^{-1})}_{I}AS$$ pues el producto matricial asocia.

$$\Leftrightarrow S^{-1}ABS = S^{-1}BAS \quad / S\cdot$$

$$\Leftrightarrow ABS = BAS \quad / \cdot S^{-1} \Leftrightarrow AB = BA$$

c) Tenemos D una diagonal con coefs. distintos, y queremos probar que una matriz es diagonal dado que cumple una prop. de conmutatividad

Esto sugiere usar a).

En efecto: $AB = BA \quad / \; S^{-1}(\,)\cdot S$

$\Leftrightarrow S^{-1}ABS = S^{-1}BAS \Leftrightarrow S^{-1}AIBS = S^{-1}BIAS$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(S^{-1}AS)}_{D}\underbrace{(S^{-1}BS)}_{\text{“}M\text{”}} = \underbrace{(S^{-1}BS)}_{\text{“}M\text{”}}\underbrace{(S^{-1}AS)}_{D}$$

Por a): $M := S^{-1}BS$ es diagonal.

∎

P2 $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} \right\}$

Dado que

- $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- $|A| = 3$
- $\forall v \in A \quad v \neq 0$

$\Bigg\}$ Nos bastará que A sea l.i. para que sea base.

i.e buscamos los $k \in \mathbb{R}$ tq

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Esto es: los $k \in \mathbb{R}$ tq

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ k & k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \text{ sólo tiene solución } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i.e, tiene sol. única).

Así, basta analizar el sistema paramétrico.

$$\xrightarrow[\substack{E_{12}(-k,1) \\ E_{13}(-1,1)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-k,1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \end{array}\right)$$

Con esto: el sist tiene sol única ssi $1-k^2 \neq 0$

i.e.

A es base $\forall k$ tq $k \notin \{-1, 1\}$.

P3

$$V = \left\{ M \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \;\middle|\; M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \right\}$$

$W = \{ M \in V \mid$ Las filas de M todas suman cero (por separado) $\}$

a) Como fuéramos probar que algo es sev. de algo usamos caract compacta:

1.- $W \subseteq V$ directo de la def de W (sólo toma elementos de V)

2.- $W \neq \phi$. En efecto $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$

pues es triangular superior $(\in V)$ y sus filas suman cada una cero.

3.- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & f_1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix}$

$M_1, M_2 \in W$.

PDQ $\lambda M_1 + M_2 \in W$. En efecto

$$\lambda M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda c_1 + c_2 \\ 0 & \lambda d_1 + d_2 & \lambda e_1 + e_2 \\ 0 & 0 & \lambda f_1 + f_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

y

suma de (1): $\lambda a_1 + a_2 + \lambda b_1 + b_2 + \lambda c_1 + c_2$

$$= \lambda \underbrace{(a_1 + b_1 + c_1)}_{\substack{1^a \text{ fila de } M_1 \\ \Rightarrow \text{ suma } 0 \\ \text{pues } M_1 \in W}} + \underbrace{(a_2 + b_2 + c_2)}_{\substack{1^a \text{ fila de } M_2 \\ \Rightarrow \text{ suma } 0 \text{ pues} \\ M_2 \in W}}$$

$\Rightarrow$ (1) suma cero.

y (2) y (3) son análogos. Con eso se prueba lo pedido.

b) Sea $M \in W$ $\quad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ tenemos que:

$M \in W \Leftrightarrow c = -a-b \;;\; e = -d \;;\; f = 0.$

Con esto:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ 0 & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ES IMPORTANTE CHEQUEAR ESTO.

Con ello:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq W.$$

Es nuestro candidato a base. Ya vimos que genera. Veamos que es l. i.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto es:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_1-\lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 & -\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De las componentes subrayadas se obtiene lo pedido.

Así $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

es base de W, y con ello, $\dim(W) = 3$

P4)

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + \alpha x_3 + x_4 = \alpha \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1 \\ \alpha x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Escribimos el sistema paramétrico matricialmente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\cdot E_{14}(-\alpha,1)]{\cdot E_{13}(-1,1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2\alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha^2 & -\alpha & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{24}(-1,1)]{E_{23}(-1,1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & -2 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2-\alpha & -\alpha-1 & -\alpha \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{34}(1-\alpha,1)\ (*)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & -2 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-3 & \alpha^2-3\alpha+1 \end{array}\right)$$

(*) Esto podemos hacerlo ya que para terminar de pivotar no es necesario * dividir por nada que dependa de α. Igualmente ponerse en casos en el paso anterior es válido.

Casos:

$\alpha = 3$ Queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to 0 \cdot x_4 = 1$$

No hay solución

$\alpha = 0$ Queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} x_4 = -1/2 \\ x_4 = -1/3 \end{array}$$

No hay solución.

Cualquier otro α:

$$x_4 = \frac{\alpha^2-3\alpha+1}{\alpha-3} \quad ; \quad x_3 = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2-3\alpha+1}{\alpha-3}\right)$$

$$x_2 = \alpha - 3\left(\frac{\alpha^2-3\alpha+1}{\alpha-3}\right) \qquad x_1 = \frac{\alpha^2-3\alpha+1}{\alpha-3}$$