Pauta Auxiliar #3

P1 a) Tenemos $AMB = 0 \in \mathbb{R}$ i.e.

$A \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in M_{2\times 1}(\mathbb{R})$

Es decir $A = (a_1 \quad a_2)$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Veamos que U es sev de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

i.- $U \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ directo por la def de U, pues todos sus elementos se definen como elementos de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

ii.- $U \neq \phi$. En efecto la matriz $\vec{0}$ pertenece al conjunto U pues

$$(a_1 \quad a_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (a_1 \quad a_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0+0 = 0$$

iii.- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $M_1, M_2 \in U$ veamos

$\lambda M_1 + M_2 \in U$ En efecto:

$$A(\lambda M_1 + M_2)B = A(\lambda M_1 B + M_2 B)$$

$$= \lambda A M_1 B + A M_2 B = \lambda \cdot 0 + 0 = 0 \quad //$$

Con ello por caracterización compacta de sev. se obtiene lo pedido

b) Si $A = (-1 \ -1)$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenemos que

$$AMB = 0 \iff (-1 \ 1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (-1 \ -1)\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} \iff -a-b-c-d = 0 \rightarrow$$ sistema de 1 ec. 4 incógnitas $\Rightarrow$ infinitas soluciones

$$\iff d = -a-b-c \iff \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} \right\} = U$$

Ahora, construyamos la base (básicamente es separar lo que tiene la misma letra)

Sea $M \in U$. $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ tq

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & -c \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Proponemos como base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{"}H\text{"}$

Demostremos que H es efectivamente una base del e.v. U. Esto es:

i) Ver que H genera y es l.i.

Ya vimos que genera, resta ver que es l.i.

En efecto: sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tq

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La igualdad en las componentes $(1,1)$ $(1,2)$ y $(2,1)$ nos dice

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

y con ello H es l.i. y genera, i.e., es base

Con eso probamos lo pedido.

Finalmente, como U tiene una base de cardinal 3, se dice que U es de dimensión 3 ▪

$\boxed{P2}$ a) Ocuparemos doble implicancia.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea el caso $u=0$ PDQ W es sev.

Ocuparemos caract. compacta.

i.- $W \subseteq M_{m,n}(\mathbb{R})$ directo por def.

ii.- $\vec{0} \in W$ sí, pues

$W = \{ M \in M_{m,n}(\mathbb{R}) : M \cdot v = \vec{0} \}$

y claramente $M = 0 \Rightarrow M \cdot v = 0$

i.e. $0 \in W$, luego, $W \neq \emptyset$

iii.- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $M_1, M_2 \in W$.

PDQ $\lambda M_1 + M_2 \in W$, En efecto vemos que:

$(\lambda M_1 + M_2) v = \lambda M_1 v + M_2 v = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$.

Es decir $\lambda M_1 + M_2 \in W$ //

Con eso tenemos la implicancia.

$\boxed{\Rightarrow}$ Usamos contra recíproca, es decir, queremos probar:

$u \neq 0 \Rightarrow W$ no es e.v.

En efecto, notemos que el paso ii de la dem de $\boxed{\Leftarrow}$ no funciona si $u \neq 0$.

Esto es, siendo precisos, que

$u \neq 0 \Rightarrow 0 \notin W \Rightarrow W$ no es sev.

Con lo que obtenemos la otra implicancia.

Así, se demuestra lo pedido.

b) Por a) el ninA ya está demostrado, i.e. el conjunto es ev, por lo que tiene base, veamos que es un singleton.
Solucionemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{13}(-3)]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ infinitas soluciones.

$\Rightarrow$ $x = -2y$, esto es:

$$\vec{x} \in \{\vec{x} \mid A\vec{x} = 0\} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego $W = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un generador del espacio.

Así probamos lo pedido.

P3 a) Ocupamos caract compacta.

i.- $E \subseteq P_3[X]$ directo por def.

ii.- $0 \in E$. en efecto, el polinomio

$p(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ cumple

$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ i.e ;

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$

Esto es $0 \in E$ //

iii.- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $p_1, p_2 \in E$. PDQ $\lambda p_1 + p_2 \in E$

En efecto: si $p_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
$p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$

Entonces:

$$(\lambda p_1 + p_2)(x) = \lambda(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

$$= \underbrace{\lambda a_0 + b_0}_{\text{"}c_0\text{"}} + \underbrace{(\lambda a_1 + b_1)}_{\text{"}c_1\text{"}} x + \underbrace{(\lambda a_2 + b_2)}_{\text{"}c_2\text{"}} x^2 + \underbrace{(\lambda a_3 + b_3)}_{\text{"}c_3\text{"}} x^3.$$

y. $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = \lambda a_0 + b_0 + \lambda a_1 + b_1 + \lambda a_2 + b_2 + \lambda a_3 + b_3 = \lambda(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + b_0 + b_1 + b_2 + b_3$
$= \lambda 0 + 0 = 0$

a su vez:

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = \lambda a_1 + b_1 + 2\lambda a_2 + 2b_2 + 3\lambda a_3 + 3b_3$$

$$= \lambda(a_1 + 2a_2 + 3a_3) + (b_1 + 2b_2 + 3b_3) = \lambda 0 + 0 = 0$$

Con ello, por def de E, $\lambda p_1 + p_2 \in E$

y así probamos lo pedido.

Así, tenemos que ahora encontrar una base.

Acá en este caso tenemos 2 ecuaciones.

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$
$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$$

$\longrightarrow$ sistema 2×4 escalonado $\Rightarrow$ infinitas soluciones.

Luego, buscamos la forma de estas soluciones:

De la 2^a ec: $a_1 = -2a_2 - 3a_3$

Reemplazamos en la 1^a ec y despejamos a_0

$$a_0 = -a_2 - a_1 - a_3 = -a_2 + 2a_2 + 3a_3 - a_3 = a_2 + 2a_3$$

$\Rightarrow a_0 = a_2 + 2a_3$

Así todo polinomio en E es de forma

$$(a_2 + 2a_3) + (-2a_2 - 3a_3)x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Separamos "por variable / letra":

$$= a_2(1 - 2x + x^2) + a_3(2 - 3x + x^3)$$

Con esto, vemos que:

$\{1 - 2x + x^2, 2 - 3x + x^3\}$ es un generador

Veamos que es base (i.e., veamos que es l.i.)

Sean λ_1, λ_2 tq $\lambda_1(1 - 2x + x^2) + \lambda_2(2 - 3x + x^3) = 0$ polinomio cero

$$\lambda_1(1 - 2x + x^2) + \lambda_2(2 - 3x + x^3)$$

$$= (\lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot 1 + (-2\lambda_1 - 3\lambda_2)x + \underline{\lambda_1 x^2} + \underline{\lambda_2 x^3} = \underbrace{\underline{0} \cdot 1 + 0 \cdot x + \underline{0 \cdot x^2} + \underline{0x^3}}_{\text{polinomio cero.}}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 0$ // Así, es base

Con ello $\dim(E) = 2$.

b) Para hacer esto siempre podemos apañarnos con elementos de la base canónica

En este caso para $\mathbb{R}_3[x]$ es:

¿Por qué 2?

$\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$

De estos queremos encontrar 2 tales que al unirlos con la base de E

$\{1-2x+x^2, 2-3x+x^3\}$ nos dé un conjunto l.i.

El plan es "adivinar" cuáles 2 nos sirven y demostrar que sirven.

- Para esto notemos que, devolviéndonos a a) el primer elemento de la base ($1-2x+x^2$) está "relacionado" a a_2 que es el coef. cuadrático del polinomio y similarmente el otro elemento de la base ($2-3x+x^3$) está "relacionado" a a_3, el coeficiente de orden 3.

  Con esto, la idea es que a_0 y a_1 "dependen" de a_2 y a_3, y nuestra idea es que no dependen de nada.

- Así proponemos que $\{1, x\}$ son los 2 elementos que nos sirven de $\mathcal{C}$ (pues no está relacionado a λ y a_1 a λ).

Probemos que $\{1-2x+x^2, 2-3x+x^3, 1, x\}$ es l.i. Si hacemos eso, tendremos un subconjunto l.i. de $\mathbb{R}_3[x]$ (un e.v. de dimensión 4) de 4 elementos, i.e., debe ser base. Vamos a probarlo entonces:

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tq

$$\lambda_1(1-2x+x^2) + \lambda_2(2-3x+x^3) + \lambda_3 + \lambda_4 x = 0$$

Probaremos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

En efecto:

$\lambda_1(1-2x+x^2)+\lambda_2(2-3x+x^3)+\lambda_3 1+\lambda_4 x$

$=(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\cdot 1+(-2\lambda_1-3\lambda_2+\lambda_4)x+\lambda_1 x^2+\lambda_2 x^3$

$=0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\\ -2\lambda_1-3\lambda_2+\lambda_4=0\\ \lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$

$\Rightarrow$ obtenemos lo pedido y

$\{1-2x+x^2, 2-3x+x^3, 1, x\}$ es la base extendida buscada.

c)(i) Ocupemos caract. compacta:

i.- $F\subseteq \mathbb{R}_3[x]$ directo de def. de F.

ii.- $0\in F$ en efecto consideremos $0+0x+0x^2+0x^3$

Su coeficiente cuadrático es 0, i.e., $0\in F$.

iii.- Sean $p_1,p_2\in F$, $\lambda\in\mathbb{R}$ PDQ $\lambda p_1+p_2\in F$

considerando $p_1(x)=a_0+a_1x+a_3x^3$ $\left(\begin{array}{l}a_2=b_2=0\\ \text{por ser de } F\end{array}\right)$
$p_2(x)=b_0+b_1x+b_3x^3$

$(\lambda p_1+p_2)(x)=(\lambda a_0+b_0)+(\lambda a_1+b_1)x+(\lambda a_3+b_3)x^3$

i.e., su coef. cuadrático es 0, por lo que

$\lambda p_1+p_2\in F$. Así F es sev de $\mathbb{R}_3[x]$.

Propuesto: ver que $\{1,x,x^3\}$ es base de F.

(ii) $E\cap F$ es e.v. pues intersección de ev's es ev:
con ello $E\cap F$ es sev de $\mathbb{R}_3[x]$.

Nos resta encontrarle una base.

sea $p \in E \cap F$ con $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

p cumple: $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$

$a_2 = 0$

Como $a_2 = 0$ las 1ras 2 ec's quedan:

(i) $a_0 + a_1 + a_3 = 0$

(ii) $a_1 + 3a_3 = 0 \longrightarrow a_1 = -3a_3$

$\Rightarrow$ en (i) $-3a_3 + a_3 + a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 2a_3$

$$\Rightarrow p(x) = \underbrace{2a_3}_{a_0} + \underbrace{(-3a_3)}_{a_1} \cdot x + \underset{a_2}{0}x^2 + a_3 x^3$$

$$= a_3 \left(2 - 3x + x^3 \right)$$

$\Rightarrow \{2 - 3x + x^3\}$ es la base buscada.