Pauta Auxiliar #2 Lineal

P1 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Ocupamos método de Gauss.

Usaremos la notación:

$E_{pf}(a,b)$, usada por el profe.

→ Tomar la fila "p" y sumarla multiplicada por "a" a la fila "f" multiplicada por "b".

La fila "p" queda igual
la fila "f" cambia.

$$C \mid I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\cdot E_{13}(1,1)]{\cdot E_{12}(-3,1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\cdot E_{23}(2,1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\cdot E_{31}(1,4)]{\cdot E_{32}(1,-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 8 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\cdot E_{21}(-2,1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & -1/2 & -1/4 \end{array}\right)$$

Con esto, obtuvimos:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 5/4 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: probar que esta es efectivamente la inversa de C.

P2

Antes que nada, escribimos el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3-\alpha & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & \alpha+5 & \beta \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 2\alpha+4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{E_{12}(-1)\\E_{13}(-1)\\E_{14}(-1)}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & -2 & 0 & \alpha+2 & \beta-1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\alpha+3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{E_{23}(2)\\E_{24}(-1)}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha & 2\alpha+\beta-3 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+4 \end{array}\right)$$

Permutamos 3ª y 4ª fila:

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+4 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha & 2\alpha+\beta-3 \end{array}\right)$$

Tenemos 3 casos:
- No hay soluciones
- Hay infinitas soluciones
- Hay una solución

* No hay soluciones: para esto buscamos una ecuación del estilo $\left[\, 0\cdot X \neq 0 \,\right]$

Así, necesitamos:

$$2-\alpha = 0 \quad \wedge \quad 2\alpha+\beta-3 \neq 0$$

$$\Rightarrow \left[\, \alpha = 2 \quad \wedge \quad \beta \neq -1 \,\right]$$

* Infinitas soluciones $\Leftrightarrow$ se busca una ecuación de tipo: $[0 \cdot x = 0]$

Pues todo $x \in \mathbb{R}$ cumple esto.

Luego lo que buscamos es:
- $2 - \alpha = 0$
- $2\alpha + \beta - 3 = 0$

$\Rightarrow \alpha = 2 \wedge \beta = -1$. Así, la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pasemos esto a ecuaciones:

(i) $a + 2b + c + 3d = 1$
(ii) $b - 2d = 1$
(iii) $c + d = 6$
(iv) $0 \cdot d = 0 \longrightarrow d$ es variable libre

Luego de (iii): $c = 6 - d$

Luego de (ii): $b = 1 + 2d$

Luego de (i) $a = 1 - 3d - (6-d) - 2(1+2d)$

$\Rightarrow a = -7 - 4d$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7-4d \\ 1+2d \\ 6-d \\ d \end{pmatrix}$$

Finalmente, para cualquier otro caso, se tiene que existe solución única. Estudiemos el caso $\alpha = \beta = 1$:

La matriz queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Pasándolos a ecuaciones:

(i) $a+2b+c-3d=1$ de (iv)

(ii) $b-d=0$

(iii) $c+d=5$ $d=0$

(iv) $d=0$

$\Rightarrow$ de (iii) $c=5$

$\Rightarrow$ de (ii) $b=0$

$\Rightarrow$ de (i) $a=1-2\cdot 0-5+3\cdot 0=-4$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P3 P idempotente ssi $P^2 = P$ $(*)$

a) Muestre P idempotente $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $P^k = P$.

Ocupamos inducción sobre K:

CB: veamos 2 casos base ($K=1$ y $K=2$)

- $K=1$: Es directo que $P^K = P^1 = P$
- $K=2$: En efecto: $P^K = P^2 = P$ pues P cumple $(*)$

HI: Supongamos que para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple que
$$P^n = P \quad (*)$$

PI: PDQ: $P^{n+1} = P$. En efecto, de la def. de potencia de una matriz:

$$P^{n+1} = (P^n) \cdot P \overset{(*)}{=} P \cdot P = P^2 \overset{(*)}{=} P.$$

Con lo que, por inducción, se prueba lo pedido ■

b) Muestre $A = (I - P)$ con P idempotente $\Rightarrow A$ idempotente.

En efecto, calculemos A^2:

$$A^2 = (I-P)(I-P) = I \cdot I - I \cdot P - P \cdot I + P \cdot P$$
$$= I - P - P + P^2 = I - 2P + P^2 \overset{(*)}{=} I - 2P + P = I - P = A$$

Con lo que A idempotente ■

c) $A = AB \wedge B = BA \Rightarrow A$ y B idempotentes.

En efecto:

$$A^2 = (A) A = (AB) \cdot A = A \cdot (BA) = A \cdot B = A$$

$$B^2 = (B) B = (BA) B = B \cdot (AB) = B \cdot A = B$$

Luego $B^2 = B$ y $A^2 = A$, con lo que A y B son idempotentes ■

P4 a) A invertible que cumple

$$A\cdot(A^2+3A+I)=0 \quad (*)$$

PDQ

$$A^{-1}=-A-3I$$

En efecto basta probar que:

$$A(-A-3I)=(-A-3I)A=I$$

La primera igualdad es directa pues:

$$A(-A-3I)=-A^2-3A=-A\cdot A-3I\cdot A$$

$$=(-A-3I)\cdot A$$ y la segunda es cierta pues.

De $(*)$ tenemos que:

exite pues se dice que A es invertible.

$$A\cdot(A^2+3A+I)=0 \quad \Big/ \ A^{-1}\cdot$$

$$\Rightarrow A^2+3A+I=0$$

$$\Rightarrow I=-A^2-3A=(-A-3I)A \quad \blacksquare$$

b) Sea B invertible que cumple $B^3=0$ (🍎)

Definimos $M:\mathbb{R}\to M_{nn}(\mathbb{R})$

$$\lambda \mapsto M(\lambda)=I+\lambda B+\frac{\lambda^2}{2}B^2.$$

Muestre (i) $M(\lambda+\beta)=M(\lambda)M(\beta)$

(ii) $M(\beta)M(\lambda)=M(\lambda)M(\beta)$

(iii) $M(\lambda)$ es invertible y $M^{-1}(\lambda)=M(-\lambda)$.

(i) $M(\lambda)M(\beta)=\left(I+\lambda B+\frac{\lambda^2}{2}B^2\right)\left(I+\beta B+\frac{\beta^2}{2}B^2\right)$

$$=I+\beta B+\frac{\beta^2}{2}B^2+\lambda B+\lambda\beta B^2+\frac{\lambda^2\beta}{2}B^3+\frac{\lambda^2}{2}B^2+\frac{\lambda^2\beta}{2}B^3$$

$$+\frac{\lambda^2\beta^2}{4}B^4 \overset{(🍎)}{=} I+\beta B+\frac{\beta^2}{2}B^2+\lambda B+\beta B+\lambda\beta B^2$$

$$= I + (\lambda+\beta) B + \left[\frac{\lambda^2}{2} + \lambda\beta + \frac{\beta^2}{2}\right] B^2$$

$$= I + (\lambda+\beta) B + \left[\frac{\lambda^2 + 2\lambda\beta + \beta^2}{2}\right] B^2$$

$$= I + (\lambda+\beta) B + \frac{(\lambda+\beta)^2}{2} B^2 =: M(\lambda+\beta)$$

Con lo que probamos lo pedido ■

(ii) En efecto notemos que, usando (i):

$$M(\lambda) M(\beta) = M(\lambda+\beta) = M(\beta+\lambda) = M(\beta) M(\lambda)$$ ■

(iii) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ notemos que, usando (i) y (ii):

$$M(-\lambda) M(\lambda) = M(\lambda) M(-\lambda) = M(\lambda-\lambda) = M(0)$$

$$= I + 0 \cdot B + \frac{0^2}{2} \cdot B^2 = I.$$

Con lo que obtenemos lo buscado ■