

Practica AUX #1 Lineal.

P1) Consideramos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $-3 \cdot B + D$

$$-3B + D = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 & -3 \cdot 9 \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -27 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6+2 & -27+0 \\ 0+0 & -9+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -27 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

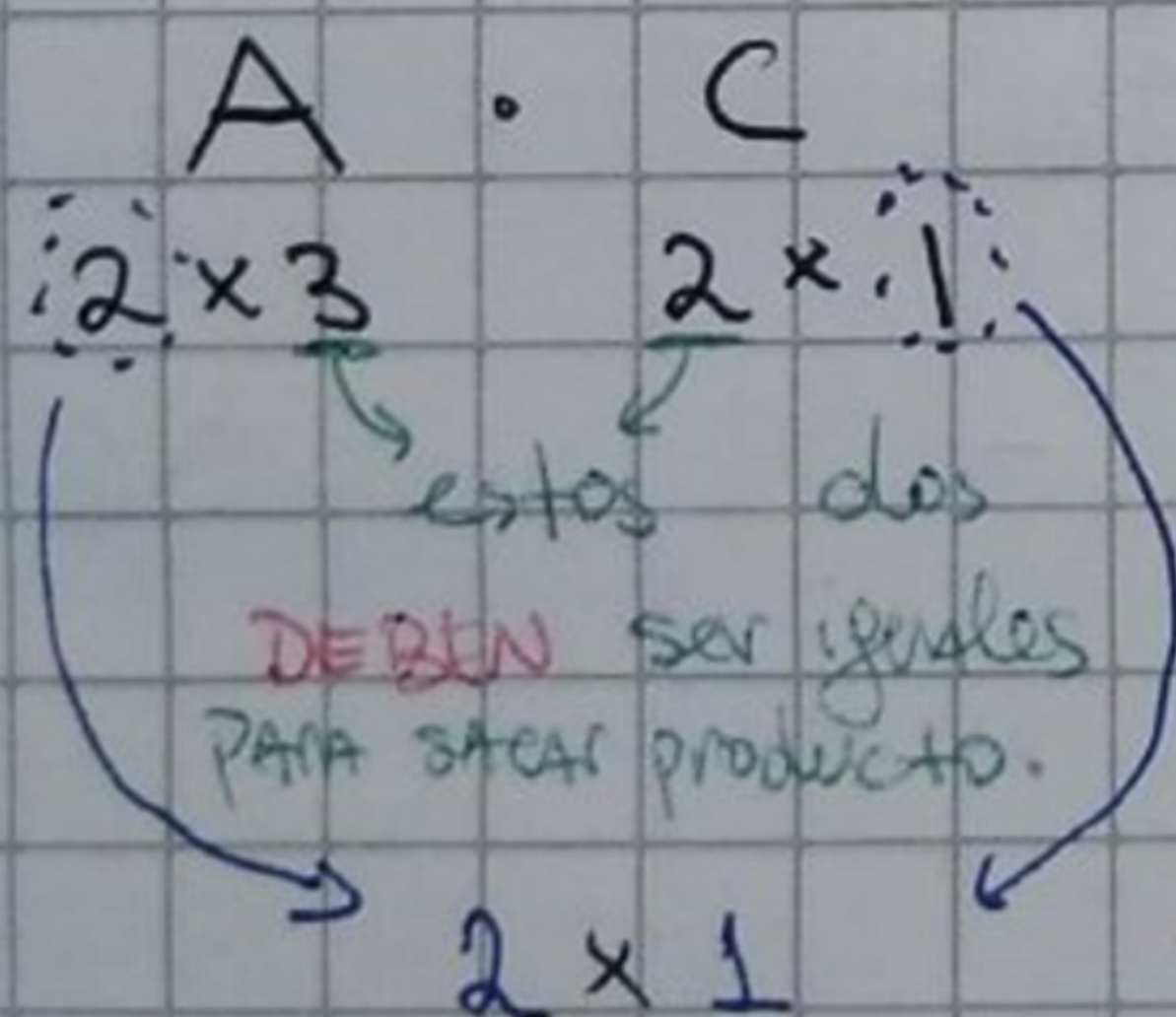
b) $C + D$

$$C + D = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{P.D.P}$$

Recordar: la suma de matrices debe ser entre matrices de las mismas dimensiones.

c) $A \cdot C$

Tip: siempre al hacer un producto matricial haz el siguiente procedimiento:



Si las marcadas con verde son iguales, entonces las dimensiones de la matriz producto se obtienen de $A \cdot C$.

En este caso, como NO son iguales el n° de columnas de A (3), y el n° de filas de C (2), NO podemos sacar el producto $A \cdot C$.

d)

$$B \cdot A \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1/2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Vemos que

$$\left. \begin{array}{cc} B \cdot A & \\ \downarrow & \downarrow \\ \underline{2 \times 2} & \underline{2 \times 3} \end{array} \right\} \underline{2 \times 3}$$

son compatibles.

Luego:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Vemos que:

$$a = (BA)_{11} = \sum_{k=1}^2 b_{1k} \cdot a_{k1}$$

$$= b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} = 2 \cdot 2 + 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

$$b = (BA)_{12} = \sum_{k=1}^2 b_{1k} \cdot a_{k2} = b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22}$$

$$= 2 \cdot 7 + 9 \cdot 3 = 41$$

$$c = (BA)_{13} = \sum_{k=1}^2 b_{1k} \cdot a_{k3} = b_{11} \cdot a_{13} + b_{12} \cdot a_{23}$$

$$= 2 \cdot (-1) + 9 \cdot 4 = 34$$

$$d = (BA)_{21} = \sum_{k=1}^2 b_{2k} \cdot a_{k1} = b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21}$$

$$= 0 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$e = (BA)_{22} = \sum_{k=1}^2 b_{2k} \cdot a_{k2} = b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22}$$

$$= 0 \cdot 7 + 3 \cdot 3 = 9$$

$$f = (BA)_{23} = \sum_{k=1}^2 b_{2k} \cdot a_{k3} = b_{21} \cdot a_{13} + b_{22} \cdot a_{23}$$

$$= 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 12$$

Luego: $B \cdot A = \begin{pmatrix} 17/2 & 41 & 34 \\ 3/2 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

12] El sistema queda dado por:

$$3x_1 + x_3 = 900$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 700$$

$$2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1000$$

$$x_1 + x_4 = 300$$

Esto planteado matricialmente queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 900 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1000 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{array} \right)$$

Escalonamos:

TIP: no es necesario escalar
"de arriba hacia abajo".

$$\xrightarrow{E_{41}(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1000 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{23}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 200 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{array} \right)$$

Esto visto como ecuaciones:

$$(i) \quad x_3 - 3x_4 = 0$$

$$(ii) \quad x_2 + x_3 = 400$$

$$(iii) \quad 2x_4 = 200 \rightarrow x_4 = 100$$

$$(iv) \quad x_1 + x_4 = 300$$

$$\xrightarrow{+ (i)} \quad x_3 = 3x_4 = 300 \quad \xrightarrow{+ (ii)} \quad x_2 = 400 - x_3 = 100$$

$$\text{y de (iv):} \quad x_1 = 300 - x_4 = 200$$

Así el tipo A vale \$200, el tipo B vale \$100, el tipo C vale \$300, y el tipo D vale \$100.

P2 Escalonamos el sistema planteado matricialmente

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & a & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & b+2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{13}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & b+2 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{E_{14}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{24}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & b-1 & -3 \end{array} \right)$$

¿Podemos ahora aplicar $E_{34}(\frac{1}{a})$?

NO!!, notemos que el caso $a=0$ nos puede invalidar el desarrollo.

Pongámonos en casos:

I.- $a=0$: en este caso la 3ª ecuación (fila) nos queda:

$$a \cdot z = 1 \quad \xRightarrow{a=0} \quad 0 \cdot z = 1 \quad \rightarrow \text{imposible}$$

$\nexists z \in \mathbb{R}$ que cumpla esto, por lo que para $a=0$ el sistema no tiene solución.

II.- $a \neq 0$: En este caso podemos terminar de escalar:

$$\xrightarrow{E_{34}(\frac{1}{a})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & \frac{1}{a}-3 \end{array} \right)$$

Vemos como quedan las ecuaciones:

- (i) $x + w = 2$
- (ii) $y + z + w = 3$
- (iii) $a \cdot z = 1$
- (iv) $(b-1)w = \frac{1}{a} - 3$

Analizamos (iv):

• Si $(b-1) = 0$ nos queda $(b=1)$

$$(iv) \quad 0 \cdot w = \frac{1}{a} - 3 = \frac{1-3a}{a}$$

- Si $1-3a \neq 0$, nos queda

$0 \cdot x_4 \neq 0$, por lo que ~~momentaneamente~~ ~~el~~ sistema ~~no tiene~~ ~~solución~~.

- Si $1-3a = 0$ nos queda: $(a = 1/3)$

$$(iv) \quad 0 \cdot w = 0 \rightarrow \text{Esto es cierto} \\ \forall w \in \mathbb{R}$$

• y vemos que, resolviendo tomando w como parámetro:

$$\text{de (i)}: \quad x = 2 - w$$

$$\text{de (iii)}: \quad z = \frac{1}{a} = 3$$

$$\text{de (ii)}: \quad y = 3 - z - w = -w$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-w \\ -w \\ 3 \\ w \end{pmatrix} \quad \text{Nos da una solución del sistema para cada } w \in \mathbb{R}$$

Luego, vemos que si $b=1$ y $a=\frac{1}{3}$ el sistema tiene infinitas soluciones.

• Si $(b-1) \neq 0$, es decir, $b \neq 1$

$$\text{Podemos resolver: (iii)} \rightarrow [z = 1/a]$$

$$(iv) \rightarrow [w = \frac{1-3a}{a(b-1)}] \xrightarrow{+(i)} [x = 2 - w = 2 - \frac{1-3a}{a(b-1)}]$$

$$\xrightarrow{+(ii)} [y = 3 - \frac{1-3a}{a(b-1)} - \frac{1}{a}] //$$

P4] Ya que para chequear invertibilidad necesitamos
 escalar A y luego para invertirla (de poder)
 debemos escalar (A|I), conecemos con (A|I)
 directamente para ahorrar tiempo.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 4/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & -1/3 & 1/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 4/3 & -1/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Ahora "fabricamos" unos en la diagonal para que sea más fácil pivotar hacia arriba:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

Ahora, escalonamos hacia arriba:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{23}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$