# Resumen Cálculo Diferencial e Integral

**Nicolás Fuenzalida Sáez**

# 1 [Semana 1] Subsucesiones y Continuidad

**Definición 1** *(Subsucesión). Sea $(s_n)$ una sucesión. Sea $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Se llama subsucesión de $s_n$ genera por $\phi$, a la sucesión $(u_n)$, definida por:*

$$u_n = s_{\phi(n)}$$

**Teorema 1** *Sea $(s_n)$ una sucesión y sea $l \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$s_n \to l \iff \text{Todas las subsucesiones de } (s_n) \text{ convergen a } l$$

**Teorema 2** *(Bolzano-Weierstrass). Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

## 1.1 Funciones continuas

**Definición 2** *(Función continua en un punto). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que $f$ es una función continua en $\bar{x}$ si*

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \bar{x} \Longrightarrow f(x_n) \to f(\bar{x})$$

**Teorema 3** *(Álgebra de funciones continuas). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Las siguientes funciones resultan ser continuas en $\bar{x}$:*

1. $f + g$.
2. $f - g$.
3. $\lambda f$, *con* $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $f \cdot g$.
5. $f/g$, *cuando* $g(\bar{x}) \neq 0$.

**Teorema 4** *(Composición de funciones continuas). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f$ es continua en $\bar{x} \in A$ y $g$ es continua en $f(\bar{x}) \in B$, entonces la función $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$.*

**Teorema 5** *(Caracterización $\epsilon$ - $\delta$). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. $f$ es continua en $\bar{x}$ ssi se cumple que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \{|x - \bar{x}| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \epsilon\}$$

**Observación** Con esta propiedad, podemos establecer la conexión entre continuidad y límite de funciones, si el dominio de la función permite estudiar el límite de $f(x)$ cuando $x \to \bar{x}$ y $\bar{x} \in A$ se tiene que:

$$f \text{ es continua en } \bar{x} \text{ ssi } \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

**Definición 3** *(Función continua). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f$ es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que $f$ es continua.*

**Observación** Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que existe una constante $L \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para todo $x, y \in A$ (una función con estas características se le dice Lipschitziana de parámetro $L$).

# 2 [Semana 2] Continuidad. Los grandes teoremas

## 2.1 El teorema de los valores intermedios

**Teorema 6** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.*

Como corolario inmediato del teorema anterior, se obtiene la Propiedad de Darboux o Teorema de los Valores Intermedios:

**Teorema 7** *(TVI). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$ entonces para todo número $e$ comprendido entre $c$ y $d$, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = e$.*

## 2.2 Máximos y mínimos: el teorema de Weierstrass

**Teorema 8** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f$ es acotada y alcanza su mínimo y máximo en $[a, b]$.*

## 2.3 Continuidad de las funciones inversas

**Teorema 9** *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con $I$ un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.*

## 2.4 Continuidad uniforme

Ya vimos la noción de continuidad en términos de sucesiones, y usando la caracterización $\epsilon$ - $\delta$. Vale la pena notar que en general $\delta$ depende de $\epsilon$ y del punto $\bar{x}$, es decir, $\delta = \delta(\epsilon, \bar{x})$. Veamos ahora que para ciertas funciones es posible encontrar $\delta > 0$ que satisface la propiedad $\epsilon$ - $\delta$ independientemente del punto $\bar{x}$ en consideración:

**Definición 4** *La función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$(\forall x, y \in A)|x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

**Observación** Una función uniformemente continua resulta ser continua en todo su dominio, es decir, siempre se tiene que

$$f \text{ es función uniformemente continua } \Longrightarrow f \text{ es función continua.}$$

Veamos condiciones para obtener la recíproca:

**Teorema 10** *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $A$ cerrado y acotado. Entonces*

*$f$ es uniformemente continua ssi ella es continua en todo punto $\bar{x} \in A$.*

# 3 [Semana 3] Derivadas

## 3.1 Funciones derivables

**Definición 5** *Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\bar{x} \in (a,b)$, si existe el límite*

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

*Dicho límite se denota $f'(\bar{x})$ o bien $\frac{df}{dx}(\bar{x})$ y se llama derivada de $f$ en $\bar{x}$.*

**Observación** De manera equivalente, $f$ es derivable en $\bar{x}$ si existe una pendiente $m = f'(\bar{x})$ tal que la función afín $a(x) = f(\bar{x}) + f'(x)(x - \bar{x})$ es una aproximación de $f$ en el sentido que

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})$$

con $\lim_{h \to 0} o(h)/h = 0$. Usando el cambio de variable $h = x - \bar{x}$, lo anterior puede escribirse equivalentemente

$$f'(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}$$

o también

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h).$$

Notemos que si $f$ es derivable en $\bar{x}$ entonces es continua en dicho punto.

**Observación** Algunas derivadas conocidas:

$$f(x) = a + bx \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = b, \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = x^2 \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = 2\bar{x}, \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = sen(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = cos(\bar{x}), \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = cos(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = -sen(\bar{x}), \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = exp(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = exp(\bar{x}), \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = ln(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}}, \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^+.$$

## 3.2 Reglas de cálculo de derivadas

**Proposición 1** *Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en $\bar{x} \in (a,b)$. Entonces:*

*(a) $f + g$ es derivable en $\bar{x}$ con*

$$(f+g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + g'(\bar{x})$$

*(b) $fg$ es derivable en $\bar{x}$ con*

$$(fg)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x})$$

*(c) Si $g(\bar{x}) \neq 0$ entonces $f/g$ es derivable en $\bar{x}$ con*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}$$

**Observación** Más derivadas conocidas:

$$f_n(x) = x^n \text{ tiene derivada } f_n'(\bar{x}) = n\bar{x}^{n-1}, \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f_n(x) = x^{-n} \text{ tiene derivada } f_n'(\bar{x}) = -n\bar{x}^{-n-1}, \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k \text{ tiene derivada}$$

$$p'(\bar{x}) = a_1 + 2a_2\bar{x} + 3a_3\bar{x}^2 + ... + na_n\bar{x}^{n-1}, \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = tan(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = sec^2(\bar{x}), \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$f(x) = cotan(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = -cosec^2(\bar{x}), \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$f(x) = senh(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = cosh(\bar{x}), \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = cosh(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = senh(\bar{x}), \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = tanh(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = \frac{1}{cosh^2(\bar{x})}, \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = a^x \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = ln(a)a^{\bar{x}}, \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}, \forall a > 0.$$

**Teorema 11** *(Regla de la cadena). Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ derivable en $\bar{x} \in (a,b)$ y $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c,d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\bar{x}$ con*

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$$

**Teorema 12** *(Derivadas de funciones inversas). Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ biyectiva y continua. Si $f$ es derivable en $\bar{x} \in (a,b)$ con $f'(\bar{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x})$ con*

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}.$$

**Observación** Más derivadas conocidas:

$$f(x) = arcsin(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{x}^2}}, \ \forall \bar{x} \in [-1, 1].$$

$$f(x) = arctan(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = \frac{1}{1 + \bar{x}^2}, \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

# 4 [Semana 4] Derivadas: Los teoremas

## 4.1 Máximos y mínimos: la regla de Fermat

**Definición 6** *Diremos que un punto $\bar{x}$ es un mínimo local de la función $f$ si existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \ \forall x \in (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon).$$

**Definición 7** *Diremos que un punto $\bar{x}$ es un máximo local de la función $f$ si existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \ \forall x \in (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon).$$

**Teorema 13** *Si $\bar{x} \in (a,b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$.*

## 4.2 El teorema del valor medio

**Teorema 14** *(TVM). Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en $(a,b)$. Entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi).$$

*En particular, si $g(x) = x$ se tiene*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

## 4.3 Algunas aplicaciones de la derivada

Una primera consecuencia directa del TVM es la llamada regla de l'Hôpital para el cálculo de límites de la forma $0/0$ o $\infty/\infty$.

**Teorema 15** *(Regla de l'Hôpital). Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en $(a,b)$, tales que*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = L$$

*con $L = 0$ o $L = \infty$, y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*siempre que este último límite exista.*

**Observación** La regla de l'Hôpital también se aplica para límites con $x \to a^-$, $x \to a$, e incluso para límites con $x \to \infty$ de la misma forma.

## 4.4 Derivadas y monotonía

**Teorema 16** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$. Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $\leq 0$) para todo $x \in (a,b)$, entonces $f$ es creciente (resp. decreciente) en $[a,b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.*

## 4.5 Derivadas y convexidad

**Definición 8** *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice convexa si las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico, vale decir*

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right](z - x) \qquad \forall x < z < y$$

*o también*

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

**Teorema 17** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$. Entonces $f$ es convexa en $[a,b]$ ssi $f'$ es creciente en $(a,b)$.*

**Observación** Análogamente, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice cóncava si las rectas secantes quedan por debajo del gráfico de la función. Esto equivale a la convexidad de $-f$ y por lo tanto, en el caso diferenciable, a que $f'$ sea decreciente.

## 4.6 Derivadas de orden superior

**Observación** Las derivadas de orden superior se definen inductivamente por

$$f^{[k]}(\bar{x}) := (f^{[k-1]})'(\bar{x}).$$

con la convención $f^{[0]}(x) = f(x)$. Notar que para que $f$ tenga una derivada de orden $k$ en $\bar{x}$, $f^{[k-1]}(x)$ debe existir al menos en un intervalo $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ y ser derivable en $\bar{x}$. Si $f$ admite una derivada de orden $k$ en todo punto de un intervalo $(a,b)$, entonces $f^{[k-1]}$ (e inductivamente todas las derivadas de orden inferior a $k$) son continuas en $(a,b)$. Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es de clase $C^k(a,b)$ si es $k$ veces derivable en todo punto del intervalo $(a,b)$, y la función $f^{[k]} : (a,b) \to \mathbb{R}$ es continua. Si esto es cierto para todo $k$, diremos que $f$ es de clase $C^\infty$.

## 4.7 Desarrollos limitados

**Definición 9** *Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ posee un desarrollo limitado de orden $k$ en torno al punto $\bar{x} \in (a,b)$ si existen constantes $a_0, ..., a_k \in \mathbb{R}$ tales que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - \bar{x}) + a_2(x - \bar{x})^2 + ... + a_k(x - \bar{x})^k + o((x - \bar{x})^k)$$

*con $\lim_{u \to 0} o(u^k)/u^k = 0$.*

**Teorema 18** *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $k$-veces derivable en $\bar{x} \in (a,b)$, y sea*

$$T_f^k(h) := f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + ... + \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}h^k$$

*su desarrollo de Taylor de orden $k$ en torno a $\bar{x}$. Entonces*

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + o((x - \bar{x})^k)$$

*con $\lim_{h \to 0} o(h^k)/h^k = 0$.*

## 4.8 Caracterización de puntos críticos

**Proposición 2** *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $k$ veces derivable en $\bar{x} \in (a,b)$, con $f'(\bar{x}) = ... = f^{[k-1]}(\bar{x}) = 0$ y $f^{[k]} \neq 0$, $k \geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:*

*a) Si $k$ es par y $f^{[k]}(\bar{x}) > 0$, $\bar{x}$ es un mínimo local.*

*b) Si $k$ es par y $f^{[k]}(\bar{x}) < 0$, $\bar{x}$ es un máximo local.*

*c) Si $k$ es impar, $\bar{x}$ es un punto de inflexión.*

## 4.9 Fórmula de Taylor

La siguiente generalización del TVM permite calcular el error de aproximación que se comete al reemplazar una función por su desarrollo de Taylor.

**Teorema 19** *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo $(a,b)$. Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden $k$ en $\bar{x} \in (a,b)$. Entonces, para todo $x > \bar{x}$ (resp. $x < \bar{x}$) existe $\xi \in (\bar{x}, x)$ (resp. $\xi \in (x, \bar{x})$) tal que*

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{[k+1](\xi)}}{(k+1)!}(x - \bar{x})^{k+1}.$$

### 4.10 El método de Newton

Consideremos la ecuación $f(x) = 0$ donde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f(a)f(b) < 0$. En el capítulo de continuidad vimos que existe una solución $x^* \in (a, b)$, la cual podemos aproximar mediante el método de bisección. Dicho método, a pesar que nos asegura converger hacia $x^*$, es relativamente lento.

Usando la noción de derivada podemos construir un método iterativo más eficiente. Supongamos que disponemos de una aproximación de la solución $x_0 \sim x^*$. Si en la ecuación $f(x) = 0$ reemplazamos la función $f(\cdot)$ por su aproximación afín en torno a $x_0$, obtenemos la ecuación lineal $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$. Si $f'(x_0) \neq 0$, la solución de esta ecuación linealizada es $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$, la cual podemos considerar como una nueva aproximación de $x^*$, que esperamos sea más precisa.

La iteración de este procedimiento a partir de la nueva aproximación conduce a un método iterativo de la forma

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

el cual estará definido mientras se tenga $f'(x_n) \neq 0$. Esta iteración se conoce como el Método de Newton (para ecuaciones).

**Teorema 20** *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2$ y supongamos que $x^* \in (a, b)$ es una solución de la ecuación $f(x^*) = 0$ tal que $f'(x^*) \neq 0$. Entonces existen constantes $\epsilon > 0$ y $M > 0$ tales que para todo punto de partida $x_0 \in I_\epsilon := (x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$ el método de Newton está bien definido y converge hacia $x^*$ con*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2.$$

## 5 Primitivas

**Definición 10** *(Primitiva). Una función $F$ continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $Int(I)$, se llama primitiva de una función $f$ sobre $I$ ssi*

$$\forall x \in Int(I), F'(x) = f(x).$$

**Observación** Dos primitivas de una función difieren a lo más en una constante. Si $F$ es una primitiva de $f$, entonces la función $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria, es otra primitiva de $f$.

**Observación** El conjunto de todas las primitivas de $f$ se anotará como $\int f$. Si $F$ es una primitiva de $f$, entonces notaremos:

$$\int f = F + c.$$

Es habitual, usar la notación clásica:

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

donde $dx$ corresponde a un símbolo que sirve para identificar a la variable.

### 5.1 Primitivas o integrales indefinidas inmediatas

A continuación se presentan algunas primitivas cuyo cálculo es elemental:

i) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \ \forall n \neq -1.$

ii) $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + c = ln(K|x|), \ K > 0.$

iii) $\int sen(x)dx = -cos(x) + c.$

iv) $\int cos(x)dx = sen(x) + c.$

v) $\int e^{ax}dx = \dfrac{1}{a}e^{ax} + c.$

vi) $\int senh(x)dx = cosh(x) + c.$

vii) $\int cosh(x)dx = senh(x) + c.$

viii) $\int sec^2(x)dx = tan(x) + c.$

ix) $\int cosec^2(x)dx = -cotan(x) + c.$

x) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctan(x) + c\ .$

xi) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsen(x) + c.$

xii) $\int \dfrac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + c.$

**Observación**

1. $\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad \int f' = f + c.$
2. $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x), \quad \left(\int f\right)' = f.$

**Proposición 3** *$\int$ es un operador lineal, es decir:*

1. $\int f \pm g = \int f \pm \int g.$
2. $\int \alpha f = \alpha \int f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

### 5.2 Teorema de cambio de variable

**Teorema 21** *(Cambio de variable). Si $u = g(x)$, entonces*

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x) \cdot g'(x)dx \text{ o, equivalentemente } \int f = \int (f \circ g) \cdot g'.$$

## 6 Primitivas (2)

### 6.1 Integración por partes

**Proposición 4** *(Fórmula de integración por partes). Sean $u$ y $v$ dos funciones de $x$, entonces:*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$\text{o, equivalentemente} \quad \int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'$$

**Observación** Usualmente la fórmula de integración por partes se escribe de manera más compacta como

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

donde $dv = v'(x)dx$ y $du = u'(x)dx$.

## 6.2 Sustituciones trigonométricas tradicionales

Cuando en una integral figuren expresiones del tipo que se indica, los siguientes cambios de variable son convenientes:

1. Para $a^2 + x^2$, usar $x = atan(v)$ o bien $x = asenh(t)$.

2. Para $a^2 - x^2$, usar $x = asen(v)$ o bien $x = acos(v)$.

3. Para $x^2 - a^2$, usar $x = asec(v)$ o bien $x = acosh(t)$.

## 6.3 Integración de funciones racionales

Se desea integrar funciones $R(x)$ de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0},$$

con $n < m$.

Si suponemos que el polinomio $Q(x)$ se ha factorizado de la siguiente forma:

$$Q(x) = b_m(x-r_1)^{\alpha_1} \cdots (x-r_s)^{\alpha_s} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_tx+c_t)^{\beta_t}$$

En donde $r_1, ..., r_s$ son las raíces de $Q$, de multiplicidades $\alpha_1, ..., \alpha_s$, y $\beta_1, ...\beta_t$ son números enteros positivos, con $x^2 + b_i x + c_i$ polinomios irreducibles.

Entonces $R(x)$ es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:

1. Por cada término $(x - r_i)^{\alpha_i}$ aparece la suma de $\alpha_i$ funciones:

$$\frac{A_{1i}}{(x-r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x-r_i)^2} + ... + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x-r_i)^{\alpha_i}}.$$

2. Por cada término $(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}$ aparece la suma de $\beta_i$ funciones de la forma:

$$\frac{B_{1i}x + C_{1i}}{x^2 + b_i x + c_i} + \frac{B_{2i}x + C_{2i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^2} + ... \frac{B_{\beta_i i}x + C_{\beta_i i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}}$$

## 6.4 Integrales trigonométricas reducibles a integrales de funciones racionales

Consideramos integrales del tipo

$$\int R(sen(x), cos(x))dx,$$

en donde $R$ es una función racional en la cual aparecen sólo $sen(x)$ y $cos(x)$.

En estos casos se aconseja el cambio de variable:

$$t = tan(x/2),$$

con lo cual

$$dt = \frac{1}{2} sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

Pero por otra parte, $arctan(t) = x/2$, de donde

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{dx}{2}.$$

Combinando ambas igualdades obtenemos que

$$cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \text{y} \quad sen\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Usamos entonces unas conocidas identidades trigonométricas para el seno y el coseno de un ángulo doble, con lo que

$$sen(x) = 2sen\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cos(x) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

En resumen,

$$t = tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad sen(x) = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right), \quad cos(x) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right), \quad dx = \left(\frac{2dt}{1+t^2}\right).$$

# 7 Integral de Riemann

## 7.1 Introducción

La teoría de la integral de Riemann tiene un objetivo simple, que es: formalizar la noción de área mediante una definición que sea compatible con las ideas comunes e intuitivas acerca de este concepto.

Surge entonces la pregunta de ¿cuáles son estas ideas básicas?. Por ejemplo, una de ellas es que el área de una superficie cuadrada de lado $a$ sea $a^2$. Si esto es verdadero, se debe concluir que la superficie de un rectángulo de lados $a$ y $b$ es $a \cdot b$.

## 7.2 Condiciones básicas para una definición de área

Sea $E$ un conjunto de puntos en el plano $OXY$ . El área del conjunto $E$ será un número real $A(E)$ que cumple las siguientes condiciones.

$(A1)$ (Positividad) $A(E) \geq 0$

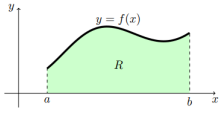
$(A2)$ (Monotonía) $E \subseteq F \Longrightarrow A(E) \leq A(F)$

$(A3)$ (Aditividad) Si $E \cap F = \emptyset \Longrightarrow A(E \cup F) = A(E) + A(F)$

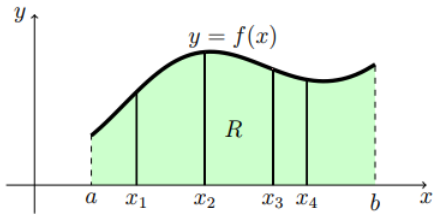
$(A4)$ (Rectangularidad) El área de una región rectangular $E$ de lados $a$ y $b$ es $A(E) = a \cdot b$

Estas 4 condiciones son necesarias y suficientes para tener una buena definición de área. Se verá más adelante, en el transcurso del curso, que la integral de Riemann las satisface adecuadamente.

**Observación** Las cuatro propiedades elementales anteriores no son independientes entre sí, ya que por ejemplo $(A2)$ es una consecuencia de $(A1)$ y $(A3)$. Mediante la integral de Riemann se definirá el área de una región $E$ particular: Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ consideremos la región $R$ limitada por el eje OX, la curva de ecuación y = f(x) y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. El área de esta región se llamará área bajo la curva $y = f(x)$ entre $a$ y $b$.



Por el momento, nos concentramos en la propiedad $(A3)$, que sugiere dividir la región $R$ en regiones más pequeñas. Por este motivo, el primer elemento que incorpora la definición de integral de Riemann es el concepto de partición, que sirve intuitivamente, para dividir la región $R$ en bandas verticales, como se muestra en la figura:




**Definición 11** *(Partición de un intervalo). Una* ***partición*** *de un intervalo* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *es un conjunto finito de puntos* $P = \{x_0, ..., x_n\}$ *tales que*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

*Se llama* ***norma*** *de la partición* $P$ *al real* $|P| = máx_{i=1,...,n}(x_i - x_{i-1})$.

## 7.3 Integración de funciones escalonadas

**Definición 12** *Diremos que una función* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es* ***escalonada****, si existe una partición* $P = \{x_0, ..., x_n\}$ *tal que* $f$ *es constante en cada intervalo abierto* $(x_{i-1}, x_i), \forall i = 1, ..., n$.

**Observación** Las funciones escalonadas sólo toman un número finito de valores diferentes, que son: los valores $f(x_i)$ en los $n+1$ puntos de la partición y los valores constantes $c_i$ que toma en los $n$ intervalos abiertos $(x_{i-1}, x_i)$. Así resulta que toda función escalonada es **acotada**.

**Observación** Diremos que $P$ es una partición asociada a $f$. Esta partición $P$ no es única ya que al subdividir los intervalos de $P$, la función $f$ todavía será constante en las subdivisiones que resulten. Por este motivo, antes de estudiar propiedades de estas funciones, conviene introducir el siguiente concepto:

**Definición 13** *Sean* $P, Q$ *particiones de un mismo intervalo* $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *Diremos que* $Q$ *es un refinamiento de* $P$, *o que* $Q$ *es más fina que* $P$ *si se cumple que* $P \subseteq Q$.

**Observación** Si $P$ y $Q$ son particiones cualesquiera, no siempre una es refinamiento de la otra, ya que el concepto de refinamiento NO está asociado directamente a la cantidad de puntos de una partición. Solo podemos decir que si $Q$ es refinamiento de $P$, entonces $Q$ tiene una cantidad de puntos mayor o igual que $P$, pero el recíproco es falso. Sin embargo, dadas dos particiones arbitrarias $P$ y $Q$, siempre existe un refinamiento común a ellas. En efecto, $P \cup Q$ es una partición (ordenando sus puntos de menor a mayor) que es refinamiento de $P$ y de $Q$ simultáneamente.

**Definición 14** *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es una función* ***escalonada****. Si para cada partición* $P = \{x_0, ..., x_n\}$ *asociada a* $f$ *se calcula*

$$I(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

*donde* $f_i$ *denota al valor constante de* $f$ *en el intervalo abierto* $(x_{i-1}, x_i)$. *Entonces* $I(f,P)$ *no depende de* $P$, *es decir, es una cantidad que depende solamente de* $f$.

**Definición 15** *Para cada función* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ***escalonada****, se define su integral de Riemann como*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

*donde* $P = \{x_0, ..., x_n\}$ *designa cualquier partición asociada a* $f$ *y* $f_i$ *denota el valor constante de* $f$ *en el correspondiente intervalo abierto* $(x_i - x_{i-1})$.

**Observación** También se suele usar la notación de Leibniz $\int_a^b f(x)dx$.

**Observación** La integral de una función escalonada solo depende de los valores de $f$ en los interiores de los intervalos de la partición y no de los valores de $f$ en los bordes.

## 7.4 Propiedades de la integral de funciones escalonadas.

**Teorema 22** *(Linealidad). Si* $f, g$ *son dos funciones escalonadas en el mismo intervalo* $[a,b]$. *Entonces, para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *la función* $\alpha f + \beta g$ *es una función escalonada en* $[a,b]$ *y se tiene*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

**Teorema 23** *(Aditividad horizontal). Si* $f$ *es una función escalonada en el intervalo* $[a,b]$ *(donde* $a < b$*) y si* $c \in (a,b)$ *es arbitrario. Entonces,* $f$ *es una función escalonada en ambos intervalos* $[a,c]$ *y* $[c,b]$ *y se tiene que*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

**Teorema 24** *(Monotonía). La integral de una función escalonada positiva en el intervalo* $[a,b]$ *es positiva. En consecuencia, si* $f, g$ *son funciones escalonadas en el intervalo* $[a,b]$ *tales que* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$, *se tiene que*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

## 7.5 Funciones Riemann integrables.

En esta sección, estudiaremos funciones que se les piden las siguientes condiciones: que se trate de una función bien definida en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ con $a < b$ y que sea acotada en dicho intervalo.

**Teorema 25** *Si* $f$ *es una función definida y acotada en* $[a,b]$ *arbitraria, entonces se cumple que:*

1. *Los siguientes conjuntos son no vacíos:*
   - $\varepsilon_-(f)$ *es el conjunto de todas las funciones escalonadas que minoran a* $f$, *es decir, aquellas funciones escalonadas* $e$ *tales que* $\forall x \in [a,b], e(x) \leq f(x)$.

∘ $\varepsilon_+(f)$ *es el conjunto de todas las funciones escalonadas que mayoran a* $f$*, es decir, aquellas funciones escalonadas* $e$ *tales que* $\forall x \in [a,b], e(x) \geq f(x)$.

2. *Siempre existen las cantidades*

$$I_-(f) = sup\left\{\int_a^b e : e \in \varepsilon_-\right\}, I_+(f) = inf\left\{\int_a^b e : e \in \varepsilon_+\right\},$$

*llamadas integral inferior e integral superior de* $f$ *en* $[a,b]$ *respectivamente.*

3. *Estas integrales verifican la desigualdad*

$$I_-(f) \leq I_+(f).$$

Cuando se cumple la igualdad, el cálculo resultante es muy útil y por eso se hace la siguiente definición:

**Definición 16** *Con las notaciones del teorema anterior, se dice que una función* $f$ *definida y acotada en el intervalo cerrado* $[a,b]$ *es Riemann integrable en* $[a,b]$ *si se cumple la condición*

$$I_-(f) = I_+(f).$$

*Dicho número común se llama la integral de* $f$ *en el intervalo* $[a,b]$ *y se le denota por*

$$\int_a^b f \text{ , o bien, } \int_a^b f(x)dx \text{ (notación de Leibniz).}$$

**Teorema 26** *(Condición de Riemann). Una función* $f$ *definida y acotada en el intervalo cerrado* $[a,b]$ *es Riemann integrable en* $[a,b]$ *si y solamente si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists f_- \in \varepsilon_-, f_+ \in \varepsilon_+, \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leq \epsilon.$$

# 8 Funciones Riemann Integrables

En esta sección veremos cómo la condición de Riemann permite demostrar que tanto las funciones monótonas en $[a,b]$ (no necesariamente continuas) y las funciones continuas en $[a,b]$, son ambas clases de funciones Riemann integrables.

**Teorema 27** *Toda función monótona en* $[a,b]$ *es Riemann integrable en* $[a,b]$.

**Teorema 28** *Toda función continua en* $[a,b]$ *es Riemann integrable en* $[a,b]$.

**Observación** En la demostración de ambos teoremas, se han usado las funciones escalonadas definidas en los intervalos $(x_{i-1}, x_i)$ por:

$$f_-(x) = m_i(f) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$f_+(x) = M_i(f) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

e iguales a $f(x_i)$ en cada punto de la partición. Con ellas se tiene que

$$\int_a^b f_- = \sum_{i=1}^n m_i(f)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f_+ = \sum_{i=1}^n M_i(f)\Delta x_i$$

que suelen llamarse suma inferior y suma superior de $f$ asociadas a $P$, y se denotan respectivamente $s(f,P)$ y $S(f,P)$. Pues bien, en ambos casos (funciones monótonas y/o continuas) existe $\delta > 0$ de modo que si $|P| \leq \delta$ se obtiene $S(f,P) - s(f,P) \leq \epsilon$. Estas sumas son interesantes, pero no tan fáciles de calcular, debido a las definiciones de $m_i$ y $M_i$. Por este motivo muchas veces se suele usar la suma obtenida por la integración de una función escalonada intermediaria, la cual se define en cada intervalo $(x_{i-1}, x_i)$ por:

$$f_*(x) = f(s_i) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

donde los reales $s_i$ son arbitrarios del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Claramente en este caso:

$$s(f,P) \leq \int_a^b f_* = \sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i \leq S(f,P)$$

La sumatoria intermedia se conoce como suma de Riemann. Como la integral de $f$ también satisface la desigualdad

$$s(f,P) \leq \int_a^b f \leq S(f,P)$$

se concluye que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \text{ partición de } [a,b], |P| \leq \delta \Longrightarrow |\sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i - \int_a^b f| \leq \epsilon$$

Esta propiedad es una de las motivaciones de la notación de Leibniz, entendiendo que la integral es el límite de una sumatoria, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i.$$

En este límite la variable que tiende a cero es la norma de la partición $P$ ($|P| \to 0$) y se calcula sobre las sumas de Riemann. Esto explica el uso del signo integral (especie de S alargada, como límite del signo sumatoria) y de la notación de Leibniz, donde el término denotado por $f(x)dx$ representaría al sumando $f(s_i)\Delta x_i$ en el proceso de límite.

## 8.1 Propiedades de la Integral.

**Teorema 29** *(Linealidad). Si* $f, g$ *son dos funciones Riemann integrables en el mismo intervalo* $[a,b]$*. Entonces, para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *la función* $\alpha f + \beta g$ *es una función Riemann integrable en* $[a,b]$ *y se tiene*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

**Teorema 30** *(Aditividad horizontal) Si* $f$ *es una función definida y acotada en* $[a,b]$ *entonces* $f$ *es Riemann integrable en* $[a,b]$ *si y solamente si, para cada* $c \in (a,b)$ *arbitrario se tiene que* $f$ *es Riemann*

*integrable en ambos intervalos* $[a,c]$ *y* $[c,b]$. *En tal caso, se tiene que*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

**Teorema 31** *(Monotonía). La integral de una función Riemann integrable positiva en el intervalo* $[a,b]$ *es positiva; en consecuencia, si* $f, g$ *son funciones Riemann integrables en* $[a,b]$ *tales que* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$, *se tiene que*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

**Teorema 32** *(Desigualdad triangular). Si* $f$ *es una función Riemann integrable en* $[a,b]$, *entonces* $|f|$ *es Riemann integrable en* $[a,b]$ *y se tiene que*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

*En consecuencia, si* $|f(x)| \leq M$ *para todo* $x \in [a,b]$, *se cumple*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq M(b-a).$$

## 8.2 Integral de $a$ a $b$ con $a \geq b$.

**Definición 17** *Sea* $f$ *una función integrable en un intervalo* $[p,q]$. *Si* $a, b \in [p,q]$ *son tales que* $a \geq b$ *entonces se define la integral de a a b del modo siguiente:*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \text{ si } a > b, \text{ o}$$

$$\int_a^b f = 0 \text{ si } a = b.$$

**Proposición 5** *Sean* $f$ *y* $g$ *integrales en* $[p,q]$, *y sean* $a, b \in [p,q]$ *entonces:*

1) $\int_a^b \alpha = \alpha(b-a), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

2) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \forall c \in [p,q].$

3) $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

4) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$

5) $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [p,q] \Longrightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b g\right|.$

6) $\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|.$

# 9 Teorema Fundamental de Cálculo

## 9.1 Teorema Fundamental del Cálculo

**Proposición 6** *Sea* $f$ *una función integrable en* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, *entonces la función* $G$ *definida por:*

$$G(x) = \int_a^x f$$

*es continua en* $[a,b]$.

**Teorema 33** *(Primer Teorema Fundamental del Cálculo). Si* $f$ *es una función continua en un intervalo* $I \subseteq \mathbb{R}$ *y* $a \in I$, *entonces la función* $G$ *definida por:*

$$G(x) = \int_a^x f$$

*es derivable en int(I) y además* $G' = f$ *en int(I).*

**Observación** Notemos que la expresión $G'(x) = f(x), \forall x \in int(I)$ más la continuidad de $G$ en $I$ nos indican que $G(x) = \int_a^x f$ es una primitiva de la función $f$ en $I$. Es decir, el primer teorema fundamental del cálculo nos garantiza que toda función continua en un intervalo posee primitivas.

**Corolario 1** *Si la función* $F$, *continua en* $I$, *es una primitiva de* $f$ *en* $I$, *entonces:*

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

**Observación** La expresión $F(b) - F(a)$ se suele abreviar como

$$F(x)\Big|_a^b \equiv F(b) - F(a).$$

**Teorema 34** *(Segundo Teorema Fundamental del Cálculo). Sea* $f$ *integrable en* $[a,b]$. *Si existe una función* $F$ *continua en* $[a,b]$ *y derivable en* $(a,b)$ *tal que* $F' = f$ *en* $(a,b)$, *entonces:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

**Observación** El Segundo Teorema fundamental del Cálculo es idéntico en contenido al corolario del Primer T.F.C., solo la hipótesis es más amplia, ya que solo pide que $f$ sea integrable y no necesariamente continua.

### Fórmula de Integración por Partes

Recordamos que si $f$ y $g$ son dos funciones continuas en $[a,b]$ y diferenciables en $(a,b)$ se tiene que:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Si además alguna de las funciones $f'g$ o $fg'$ fuera integrable, la otra también lo sería y se tendría que

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg',$$

es decir,

$$fg\Big|_a^b = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'.$$

**Teorema 35** *Sean $f$ y $g$ dos funciones continuas en un intervalo $I$ y diferenciables en int(I). Sean $a, b \in int(I)$. Si $f'$ y $g'$ son continuas entonces*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

**Integración por Sustitución o Cambio de Variable**

**Teorema 36** *Sea $g$ una función continua en un intervalo $I$ y derivable en $int(I)$, con $g'$ continua. Sean $a, b \in int(I)$, con $a < b$. Sea $f$ una función continua en $g([a, b])$, entonces:*

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

## 9.2 Teoremas del Valor Medio y Taylor para integrales.

**Definición 18** *(Valor Medio de una función). Sea $f$ una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Se llama valor medio de $f$ en $[a, b]$ al número real:*

$$\frac{1}{b-1}\int_a^b f.$$

*A este real se le anota $\bar{f}$ o bien $\langle f \rangle$.*

**Teorema 37** *(Valor Medio para integrales). Si $f$ es continua en $[a, b]$, entonces $\exists \xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = \langle f \rangle$, es decir:*

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a).$$

**Teorema 38** *(Valor Medio generalizado para integrales). Si $f$ es continua en $[a, b]$ y $g$ es una función integrable en $[a, b]$ que no cambia de signo, entonces $\exists \xi \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g.$$

**Teorema de Taylor con Resto Integral**

Sea $I$ un intervalo abierto que contenga al intervalo cerrado de extremos $x_0$ y $x$. Consideremos una función $f$ de clase $C^{(n+1)}(I)$, entonces claramente

$$\int_{x_0}^x f'(t)dt = f(x) - f(x_0),$$

es decir,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt.$$

Usando integración por partes repetidas veces, se obtiene la siguiente fórmula:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

El término:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

se denomina resto integral del desarrollo de Taylor.

**Observación** Si en la expresión integral del resto se aplica el teorema del valor medio generalizado para integrales se tiene que:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

que corresponde a la expresión de Lagrange para el resto del desarrollo de Taylor.

# 10 Aplicación de la Integral de Riemann

## 10.1 Cálculo de Áreas

Sea $f$ una función no negativa sobre $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, queremos definir el área de las regiones del tipo:

$$R = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}.$$

Si designamos el área de la región $R$ por $A_a^b$, entonces las condiciones básicas de la definición de área son:

i) $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b] \Longrightarrow A_a^b(f) \leq A_a^b(g)$

ii) $A_a^b(f) = A_a^c(f) + A_c^b(f), \qquad \forall c \in [a, b]$

iii) $A_a^b(c) = c(b-a)$

Si la función $f$ es integrable entre $a$ y $b$, para que el área satisfaga las propiedades *i*), *ii*), *iii*), la única definición posible es:

$$\text{área}(R) = A_a^b(f) = \int_a^b f$$

**Área de regiones definida por funciones no positivas**

Si $f$ es una función definida en $[a, b]$ con valores negativos, entonces el área de la región $R$ encerrada sobre su gráfico, y debajo del eje de las $x$ se puede calcular fácilmente como el área bajo la curva $y = -f(x)$. Luego se tendrá que el área es

$$\text{área}(R) = \int_a^b (-f) = \int_a^b |f|.$$

En general si $f$ es una función que cambia de signo en $[a, b]$ un número finito de veces y $R$ es la región comprendida entre el gráfico de $f$ (por sobre o bajo, según corresponda) y el eje $OX$, entonces el área de la región $R$ se podrá calcular como

$$A_a^b(f) = \int_a^b |f|.$$

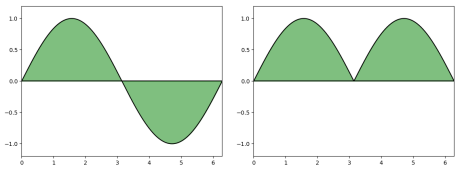


**Figura 1:** $A_0^{2\pi}(sen) = 0$ y $A_0^{2\pi}(|sen|) = 4$.

**Observación** No siempre es necesario integrar a lo largo del eje $OX$. En algunos casos, puede ser conveniente integrar a lo largo del eje $OY$, de la siguiente forma

$$A = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} x(y)dy$$

## 10.2 Volúmenes de Sólidos

Aceptemos que el concepto de volumen satisface las condiciones siguientes (análogas a las del área):

i) $A \subseteq B \Longrightarrow V(A) \leq V(B)$

ii) $V(A \cap B) = 0 \Longrightarrow V(A \cup B) = V(A) + V(B)$

iii) Si $A$ es un cilindro recto de base $B$ y altura $h$, entonces $V(A) = B \cdot h$

Se prueba que si la función $A(x)$ es integrable en $[a, b]$, entonces el volumen del sólido es

$$V(C) = \int_a^b A(x)dx$$

## 10.3 Volumen de un sólido de revolución

Un sólido de revolución es la figura geométrica que se obtiene por la rotación de un área plana en torno a un eje fijo. Dos casos particulares se destacan y corresponden a los siguientes:

1. Rotación de la región: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b;\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ en torno al eje $OX$. Este caso corresponde a un caso particular de los sólidos donde se conoce el área transversal a una dirección dada. En efecto las secciones transversales al eje de rotación son círculos de radio $f(x)$. Por esta razón, su volumen se calcula como

$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

2. Rotación de la misma región en torno al eje $OY$ (bajo el supuesto que $0 < a < b$). En este caso no es difícil probar que el volumen de dicho sólido se puede calcular mediante la integral

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

# 11 Aplicaciones de la Integral (2)

## 11.1 Longitud de un Arco de Curva (Rectificación)

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva en el plano $OXY$, donde $x \in [a, b]$. Nos interesa obtener una expresión para el largo de esta curva.

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

En consecuencia, diremos que esta última fórmula define el concepto de longitud de curva cuando $f$ es una función continuamente diferenciable en un intervalo $[a, b]$. Incluso usaremos esta fórmula en el caso de funciones continuamente diferenciables por pedazos.

## 11.2 Superficie del Manto de un Sólido de Revolución

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva en el plano $OXY$, donde $f$ es continuamente diferenciable en $[a, b]$. Nos interesa obtener una expresión para calcular el área del manto del sólido generado por la rotación de la región bajo la curva $y = f(x)$, en torno al eje $OX$.

$$A_a^b(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

## 11.3 Coordenadas Polares

**Definición 19** *Dado los reales $r$ y $\phi$, se determina el punto $P$ del plano de coordenadas $(x, y)$ mediante las fórmulas*

$$x = r\cos(\phi)$$

$$x = r\sin(\phi).$$

*El par $(r, \phi)$ corresponde a las coordenadas polares del punto $P$.*

**Área en Coordenadas Polares**

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Usando esta función se define la curva en coordenadas polares cuya ecuación es $r = f(\phi)$. Supongamos además que la función $f$ es no negativa y que $b - a \leq 2\pi$. Con estos supuestos se desea encontrar el área de la región $R$ definida por

$$R = \{(r\cos(\phi), r\sin(\phi) : \phi \in [a, b], r \in [0, f(\phi)]\}.$$

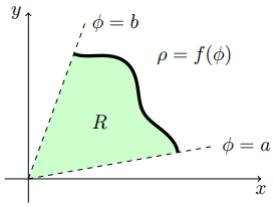



**Figura 2:** Región en coordenadas polares.

$$\text{área}(R) = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\phi)d\phi.$$

## 11.4 Centro de Gravedad de una Superficie Plana

Considérese un plano ideal, sin peso, en el cual se encuentran localizadas $n$ partículas puntuales $P_i$ de masas $m_i$, $i = 1, ..., n$.

Si este plano se apoya sobre un eje recto horizontal, nos interesa estudiar la tendencia del plano a rotar en torno a dicho eje accionado por el peso de las partículas. Considerando un sistema ortogonal de ejes $OXY$ en el plano, y la recta paralela al eje $OY$ de ecuación $L : x = x_0$, la tendencia a rotar del plano en torno de $L$ se mide matemáticamente por el "Momento Estático" que produce el peso de las partículas en torno de $L$, que, para una partícula aislada, resulta ser igual al producto del peso por la distancia al eje de rotación.

Para el sistema de $n$ partículas, el momento estático total es igual a la suma de los $M_L(x_i)$, o sea:

$$M_L = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)m_i g.$$

El sistema de partículas estará en equilibrio cuando su momento estático total sea nulo, es decir, cuando $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)m_i g = 0$. De esta ecuación se despeja fácilmente la posición de la recta en torno a la cual no hay tendencia a la rotación.

Su ecuación sería

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Análogamente si se considera ahora la tendencia del plano a rotar en torno a un eje paralelo a $OX$, se llega a la expresión:

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

El punto de coordenadas $(x_0, y_0)$ se llama centro de gravedad del sistema. Teóricamente, el plano queda en equilibrio sustentado de ese punto únicamente.

**Momento Estático y Centro de Gravedad de un Área Plana**

El concepto de momento y de centro de gravedad se extiende fácilmente al caso en que la masa total del sistema se encuentra uniformemente distribuida sobre una región plana. Para esto debe tenerse presente que:

1. Si una región plana tiene un eje de simetría, su centro de gravedad debe estar sobre él. Es el caso, por ejemplo, de un cuadrado, un rectángulo, de un circulo, etc.
2. La masa de cualquier región de área $A$ es $\rho \cdot A$, donde $\rho$ es la densidad y la suponemos contante.

Se deduce que las coordenadas del centro de gravedad $(X_G, Y_G)$ son

$$X_G = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

$$Y_G = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

# 12 Integrales Impropias

## 12.1 Introducción

El propósito de esta sección, es extender la noción de integral al caso de intervalo no acotados, y al caso de funciones no acotadas sobre un intervalo acotado.

**Definición 20** *(Integral Impropia de Primera Especie (Intervalo no Acotado)) Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ diremos que $f$ es integrable en $[a, \infty)$ si se cumple que:*

*(i) $\forall x \in (a, \infty)$, $f$ es integrable en $[a, x]$ y además*

*(ii) Existe el límite definido por*

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f$$

**Observación** 1. Si una función es integrable en el intervalo $[a, \infty)$ entonces al valor del límite se le llama integral impropia de primera especie de $f$ y se le denota

$$\int_a^\infty f = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f.$$

2. Si el límite $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f$ existe, se dice que la integral impropia es convergente y si no existe se dice que la integral impropia es divergente.

3. De una manera análoga se definen las integrales de primera especie de la siguiente forma

   i) $\int_{-\infty}^b f = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f$

   ii) $\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f$ donde la constante $c \in \mathbb{R}$ puede ser cualquiera. En esta última definición es importante que las dos integrales de la derecha existan o que sean convergentes. Si alguna de estas integrales no converge, entonces la integral de la izquierda tampoco.

**Definición 21** *(Integral Impropia de Segunda Especie (Funciones no Acotadas)) Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ una función no acotada, diremos que $f$ es integrable en $[a, b)$ ssi:*

*(i) $\forall x \in (a, b)$, $f$ es integrable en $[a, x]$.*

*(ii) El límite $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ existe.*

**Definición 22** *(Integrales Impropias de Tercera Especie o Mixtas) Son las que se obtienen combinando integrales impropias de $1^o$ y $2^o$ especie. Por ejemplo*

$$\int_{-1}^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0^-} \frac{dx}{x^2} + \int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

*Este tipo de integral será convergente ssi cada una de sus componentes es una integral convergente.*

## 12.2 Algunos criterios de convergencia para integrales impropias

**Teorema 39** *(Criterio de Comparación). Sean $f$ y $g$ funciones continuas en $[a, \infty)$ tales que:*

$$(\exists b \geq a)(\forall x \geq b) 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

*entonces:*

*Si $\int_a^\infty g$ converge $\Longrightarrow \int_a^\infty f$ converge.*

*Recíprocamente, si $\int_a^\infty f$ diverge $\Longrightarrow \int_a^\infty g$ diverge.*

**Teorema 40** *(Criterio del cuociente de funciones). Sean $f$ y $g$ funciones continuas en $[a,\infty)$ y no negativas en $[b,\infty)$, donde $b \geq a$ y tales que:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

*Entonces las integrales impropias $\int_a^\infty f$ y $\int_a^\infty g$ son ambas convergentes o ambas divergentes.*

## 12.3 Convergencia absoluta

**Definición 23** *(Convergencia absoluta) Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, diremos que $\int_a^\infty f$ es absolutamente convergente si $\int_a^\infty |f|$ converge.*

**Teorema 41** *Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\int_a^\infty f \text{ converge absolutamente} \implies \int_a^\infty f \text{ converge.}$$

# 13 Series numéricas

## 13.1 Definición y ejemplos básicos

En esta parte estudiaremos la noción intuitiva de sumas infinitas que llamaremos series. Estudiaremos solamente conjuntos finitos o numerables.

**Definición 24** *(Serie) Una serie es un par ordenado $(A,(a_n))$ donde $A$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ numerable y $(a_n)_{n\geq 0}$ es una numeración (ordenamiento) del conjunto $A$.*

*La sucesión $(a_n)$ se llama el término general de la serie. A partir de $(a_n)$ definimos la sucesión $(s_n)$ de las sumas parciales por $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. El valor de la serie existe cuando la sucesión $(s_n)$ posee límite. En tal caso decimos que la serie es **convergente** y su valor es el límite de $(s_n)$.*

## 13.2 Condiciones para la convergencia

**Definición 25** *(Sucesión de Cauchy) Una sucesión $(x_n)$ de números reales se dice de **Cauchy** si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

**Teorema 42** *Una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

**Teorema 43** *(Criterio de Cauchy). Sea $(a_n)$ una sucesión y $(s_n)$ la sucesión de sus sumas parciales. La serie $\sum a_k$ converge si y sólo si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, m > n \implies |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon.$$

**Teorema 44** *Si la serie $\sum a_k$ converge entonces la sucesión $(a_n) \to 0$.*

**Observación** No es cierto que si $(a_k) \to 0$ entonces la serie $\sum a_k$ converja.

## 13.3 Álgebra de series

**Teorema 45** *Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes. Entonces*

1. *$\sum(a_k + b_k)$ es convergente y su valor es $(\sum a_k) + (\sum b_k)$.*
2. *Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum(\lambda a_k)$ es convergente y su valor es $\lambda(\sum a_k)$.*

## 13.4 Criterios para analizar convergencia de series de términos no negativos

**Teorema 46** *Una serie de términos no negativos converge si y sólo si las sumas parciales son acotadas superiormente.*

**Teorema 47** *Sea $\sum a_k$ una serie de términos no negativos y convergente. Sea $(b_k)$ una numeración del conjunto $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\sum b_k$ es convergente y $\sum b_k = \sum a_k$.*

### Mayoración de series

**Teorema 48** *Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ dos sucesiones no negativas de modo que existen $n_0$ y $\alpha > 0$ tales que, para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k < \infty$ entonces $\sum a_k < \infty$.*

**Observación** La contrarrecíproca de este criterio nos dice que si $\sum a_k$ diverge lo mismo le ocurre a $\sum b_k$.

### Comparación por cuociente

**Teorema 49** *Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ dos sucesiones tales que, para todo $n \geq 0$, $0 < a_n, b_n$ y supongamos que $c := \lim \frac{a_n}{b_n}$ existe. Se tienen las siguientes afirmaciones dependiendo del valor de $c$.*

1. *Caso $c = 0$. Si $\sum b_k < \infty$ entonces $\sum a_k < \infty$.*
2. *Caso $c > 0$. Se tiene que $\sum b_k < \infty$ si y sólo si $\sum a_k < \infty$.*

### Criterio del cuociente

**Teorema 50** *Sea $(a_n)$ una sucesión de términos positivos y supongamos que $r := \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe. Dependiendo del valor de $r$ se tienen las siguientes conclusiones.*

1. *Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.*
2. *Si $r > 1$ o $r = \infty$ entonces $\sum a_k$ diverge.*
3. *Si $r = 1$ entonces $\sum a_k$ puede converger o divergir, es decir, en este caso el criterior no nos ayuda a determinar la convergencia de la serie.*

**Observación** El límite $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ podría no existir y la serie $\sum a_k$ ser convergente.

### Criterio de la Raíz $n$-ésima

**Teorema 51** *Sea $(a_n)$ una sucesión de términos no negativos y supongamos que $r := \lim(a_n)^{\frac{1}{n}}$ existe. Se tienen las siguientes conclusiones.*

1. *Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.*
2. *Si $r > 1$ o $r = \infty$ entonces $\sum a_k$ diverge.*
3. *Si $r = 1$ entonces $\sum a_k$ puede converger o divergir, en este caso el criterio no nos ayuda a determinar la convergencia de la serie.*

### Criterio de la integral impropia

**Teorema 52** *Sea $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}^+$ una función decreciente. Se tiene que $\sum_{n\geq 1} f(n) < \infty$ equivale a $\int_1^\infty f(x)dx < \infty$.*

## 13.5 Criterios Generales

Para una sucesión $(u_n)$ acotada y no negativa, definamos la sucesión $(v_n)$ por $v_n = \sup\{u_k : k \geq n\}$, entonces $(v_n)$ es una sucesión decreciente, pues cuando $n$ crece, el supremo es calculado sobre un conjunto de índices menor (en el sentido de la inclusión), y es acotada inferiormente. En consecuencia, $\lim v_n$ siempre existe. A este límite se le llama el límite superior de $(u_n)$ y se denota $\limsup u_n$. Si la sucesión converge entonces $\limsup u_n = \lim u_n$.

**Teorema 53** *Sea $(a_n)$ una sucesión de términos no negativos y $u_n = (a_n)^{\frac{1}{n}}$. Sea $r := \limsup u_n$.*

1. *Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.*
2. *Si $r > 1$ o $r = \infty$ entonces $\sum a_k$ diverge.*
3. *Si $r = 1$ entonces $\sum a_k$ puede converger o divergir.*

## 13.6 Series de signo arbitrario

**Definición 26** *(Convergencia Absoluta) Sea $\sum a_k$ una serie con $(a_k)$ una sucesión cualquiera. Decimos que la serie es absolutamente convergente si $\sum |a_k| < \infty$.*

**Teorema 54** *Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además, una serie es absolutamente convergente si y sólo si las series de sus términos negativos y la de sus términos positivos son convergentes.*

## 13.7 Criterio de Leibnitz

Para mostrar ejemplos de series convergentes que no son absolutamente convergentes (se les llama **condicionalmente convergentes**) vamos a probar el siguiente teorema.

**Teorema 55** *Sea $(a_n)$ una sucesión decreciente y convergente a cero (luego $(a_n)$ es no negativa). Entonces la serie $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.*

## 13.8 Estabilidad de las series bajo reordenamiento

**Teorema 56** *Si la serie $\sum a_k$ es absolutamente convergente entonces toda serie $\sum b_k$ donde $(b_k)$ es un reordenamiento de $(a_k)$ es absolutamente convergente y su valor es igual a $\sum a_k$.*

**Teorema 57** *Si $\sum a_k$ es condicionalmente convergente entonces para cualquier número $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva tal que $\sum a_{f(k)} = \alpha$.*

## 13.9 Multiplicación de series

**Teorema 58** *Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series absolutamente convergentes entonces $(\sum a_k)(\sum b_k)$ es igual a $\sum c_k$ donde $(c_k)$ es cualquier sucesión que contiene exactamente una vez cada uno de los productos $a_i b_j$, por ejemplo, $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$.*

# 14 Series de potencias

**Definición 27** *(Serie de potencias) Una serie de potencias es una serie en donde el término general es de la forma $a_k(x-\alpha)^k$.*

No es difícil notar que la convergencia de estas series depende fuertemente del valor de $x$. Nosotros nos concentraremos en el caso de series de potencias centradas en cero, es decir, consideraremos solamente el caso $\alpha = 0$.

**Proposición 7** *Si la serie $\sum a_k x_0^k$ converge, se tiene que para cada $a \in (0, |x_0|)$ y para todo $x \in [-a, a]$ la serie $\sum a_k x^k$ converge absolutamente.*

## 14.1 Radio e intervalo de convergencia

Notar que la Proposición 7 nos dice que si $\sum a_k x_0^k$ diverge entonces también diverge la serie $\sum a_k x^k$ para $|x| > |x_0|$. Definamos

$$R = \sup\left\{x_0 : \sum a_k x_0^k < \infty\right\}.$$

Este valor es finito si existe algún $x$ para el cual la serie $\sum a_k x^k$ diverge y vale $\infty$ en otro caso.

**Definición 28** *(Radio de Convergencia) Al valor $R$ lo llamaremos el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum a_k x^k$.*

La Proposición 7 nos asegura que para todo $x \in (-R, R)$ la serie converge y para todo $x \notin (-R, R)$ la serie diverge. Si aplicamos el criterio del la raíz $n$-ésima a la serie $\sum a_k x^k$ obtenemos $r = |x| \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

Entonces, $\rho = \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$ es igual a $\frac{1}{R}$ cuando $R \neq 0$ y vale cero cuando $R = \infty$, con lo que tenemos una manera de calcular $R$ basada solamente en $(a_n)$.

**Definición 29** *(Intervalo de Convergencia) Llamamos intervalo de convergencia $I$ al conjunto de reales $x$ para los cuales la serie $\sum a_k x^k$ converge. Tenemos que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.*

## 14.2 Series de potencias, integración y derivación

Dada una serie de potencias $\sum a_k x^k$ con intervalo de convergencia $I$, es posible definir naturalmente la función

$$f : I \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \sum a_k x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{1}$$

**Teorema 59** *Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias con radio de convergencia mayor que cero. Definiendo la función $f$ como en (1), se tiene que ella es continua en $int(Dom\, f)$.*

**Proposición 8** *Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias de radio de convergencia $R > 0$. Entonces para todo $p \in \mathbb{Z}$, la serie $\sum k^p a_k x^k$ tiene radio de convergencia $R$.*

**Teorema 60** *Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias, con radio de convergencia $R > 0$. Entonces la función $f$ definida como en (1), es integrable en $(-R, R)$ y*

$$\forall x \in (-R, R), \quad \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (\sum a_k t^k)dt = \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}.$$

**Teorema 61** *Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias, con radio de convergencia $R > 0$. Entonces la función $f$ definida como en (1), es derivable en $(-R, R)$ y*

$$\forall x \in (-R, R), \quad f'(x) = \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}.$$

Los resultados anteriores nos dicen que el radio de convergencia de una serie y el de la serie derivada son iguales. Más aún, lo mismo es cierto para la serie derivada por lo que también será cierto para las derivadas de cualquier orden. Entonces la función $f(x)$ que se obtiene de la serie de potencias es infinitamente derivable y todas sus derivadas tienen el mismo radio de convergencia. Además se tiene que

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k \geq j} k(k-1)...(k-j) a_k x^{k-j},$$

es decir, la serie que se obtiene al derivar término a término la serie de la función $f$ representa la derivada de orden $j$ de $f$. De aquí que, $f^{(j)}(0) = a_j j!$, y entonces el término $a_j$ de la serie que representa a $f$ debe ser $\dfrac{f^{(j)}(0)}{j!}$, es decir, aquel de la serie de Taylor para $f$ en torno a cero.

## 14.3 Álgebra de series de potencias

Las series de potencias se pueden sumar y multiplicar y los radios de convergencia de las series resultantes estarán determinados por aquellos de las series originales.

**Teorema 62** *Dadas dos series de potencias $\sum a_k x^k$ y $\sum b_k x^k$ convergentes para $x_0$. Entonces la serie $\sum (a_k + b_k) x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum (a_k + b_k) x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k$. Además, si $c_k = \sum a_j b_{k-j}$ la serie $\sum c_k x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum c_k x^k = (\sum a_k x^k)(\sum b_k x^k)$.*