

# Resumen Cálculo Diferencial e Integral

Nicolás Fuenzalida Sáez

## 1 [Semana 1] Subsucesiones y Continuidad

**Definición 1** (Subsucesión). Sea  $(s_n)$  una sucesión. Sea  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una función estrictamente creciente. Se llama subsucesión de  $s_n$  generada por  $\phi$ , a la sucesión  $(u_n)$ , definida por:

$$u_n = s_{\phi(n)}$$

**Teorema 1** Sea  $(s_n)$  una sucesión y sea  $l \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$s_n \rightarrow l \iff \text{Todas las subsucesiones de } (s_n) \text{ convergen a } l$$

**Teorema 2** (Bolzano-Weierstrass). Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.

### 1.1 Funciones continuas

**Definición 2** (Función continua en un punto). Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\bar{x} \in A$ . Diremos que  $f$  es una función continua en  $\bar{x}$  si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \rightarrow \bar{x} \implies f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$$

**Teorema 3** (Álgebra de funciones continuas). Sean  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuas en  $\bar{x} \in A \cap B$ . Las siguientes funciones resultan ser continuas en  $\bar{x}$ :

1.  $f + g$ .
2.  $f - g$ .
3.  $\lambda f$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
4.  $f \cdot g$ .
5.  $f/g$ , cuando  $g(\bar{x}) \neq 0$ .

**Teorema 4** (Composición de funciones continuas). Sean  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  es continua en  $\bar{x} \in A$  y  $g$  es continua en  $f(\bar{x}) \in B$ , entonces la función  $g \circ f$  es continua en  $\bar{x}$ .

**Teorema 5** (Caracterización  $\epsilon - \delta$ ). Sean  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\bar{x} \in A$ .  $f$  es continua en  $\bar{x}$  ssi se cumple que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \{ |x - \bar{x}| \leq \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| \leq \epsilon \}$$

**Observación** Con esta propiedad, podemos establecer la conexión entre continuidad y límite de funciones, si el dominio de la función permite estudiar el límite de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow \bar{x}$  y  $\bar{x} \in A$  se tiene que:

$$f \text{ es continua en } \bar{x} \text{ ssi } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

**Definición 3** (Función continua). Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  es continua  $\forall \bar{x} \in A$ , diremos que  $f$  es continua.

**Observación** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función y supongamos que existe una constante  $L \geq 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$  para todo  $x, y \in A$  (una función con estas características se le dice Lipschitziana de parámetro  $L$ ).

## 2 [Semana 2] Continuidad. Los grandes teoremas

### 2.1 El teorema de los valores intermedios

**Teorema 6** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(a)f(b) \leq 0$ . Entonces existe  $\bar{x} \in [a, b]$  tal que  $f(\bar{x}) = 0$ .

Como corolario inmediato del teorema anterior, se obtiene la Propiedad de Darboux o Teorema de los Valores Intermedios:

**Teorema 7** (TVI). Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Si  $c, d \in f([a, b])$  entonces para todo número  $e$  comprendido entre  $c$  y  $d$ , existe  $x \in [a, b]$  tal que  $f(x) = e$ .

### 2.2 Máximos y mínimos: el teorema de Weierstrass

**Teorema 8** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces  $f$  es acotada y alcanza su mínimo y máximo en  $[a, b]$ .

### 2.3 Continuidad de las funciones inversas

**Teorema 9** Sea  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con  $I$  un intervalo. Entonces  $J = f(I)$  es un intervalo y la inversa  $f^{-1} : J \rightarrow I$  es continua.

### 2.4 Continuidad uniforme

Ya vimos la noción de continuidad en términos de sucesiones, y usando la caracterización  $\epsilon - \delta$ . Vale la pena notar que en general  $\delta$  depende de  $\epsilon$  y del punto  $\bar{x}$ , es decir,  $\delta = \delta(\epsilon, \bar{x})$ . Veamos ahora que para ciertas funciones es posible encontrar  $\delta > 0$  que satisface la propiedad  $\epsilon - \delta$  independientemente del punto  $\bar{x}$  en consideración:

**Definición 4** La función  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice uniformemente continua si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que

$$(\forall x, y \in A) |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

**Observación** Una función uniformemente continua resulta ser continua en todo su dominio, es decir, siempre se tiene que

$$f \text{ es función uniformemente continua} \implies f \text{ es función continua.}$$

Veamos condiciones para obtener la recíproca:

**Teorema 10** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  cerrado y acotado. Entonces

$f$  es uniformemente continua ssi ella es continua en todo punto  $\bar{x} \in A$ .

### 3 [Semana 3] Derivadas

#### 3.1 Funciones derivables

**Definición 5** Diremos que  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en el punto  $\bar{x} \in (a, b)$ , si existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

Dicho límite se denota  $f'(\bar{x})$  o bien  $\frac{df}{dx}(\bar{x})$  y se llama derivada de  $f$  en  $\bar{x}$ .

**Observación** De manera equivalente,  $f$  es derivable en  $\bar{x}$  si existe una pendiente  $m = f'(\bar{x})$  tal que la función afín  $a(x) = f(\bar{x}) + f'(x)(x - \bar{x})$  es una aproximación de  $f$  en el sentido que

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})$$

con  $\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/h = 0$ . Usando el cambio de variable  $h = x - \bar{x}$ , lo anterior puede escribirse equivalentemente

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h)$$

o también

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h).$$

Notemos que si  $f$  es derivable en  $\bar{x}$  entonces es continua en dicho punto.

**Observación** Algunas derivadas conocidas:

$$f(x) = a + bx \text{ tiene derivada } f'(x) = b, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = x^2 \text{ tiene derivada } f'(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \text{sen}(x) \text{ tiene derivada } f'(x) = \text{cos}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \text{cos}(x) \text{ tiene derivada } f'(x) = -\text{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \exp(x) \text{ tiene derivada } f'(x) = \exp(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \ln(x) \text{ tiene derivada } f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

#### 3.2 Reglas de cálculo de derivadas

**Proposición 1** Sean  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivables en  $\bar{x} \in (a, b)$ . Entonces:

(a)  $f + g$  es derivable en  $\bar{x}$  con

$$(f + g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + g'(\bar{x})$$

(b)  $fg$  es derivable en  $\bar{x}$  con

$$(fg)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x})$$

(c) Si  $g(\bar{x}) \neq 0$  entonces  $f/g$  es derivable en  $\bar{x}$  con

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}$$

**Observación** Más derivadas conocidas:

$$f_n(x) = x^n \text{ tiene derivada } f'_n(x) = nx^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f_n(x) = x^{-n} \text{ tiene derivada } f'_n(x) = -nx^{-n-1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k \text{ tiene derivada}$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \tan(x) \text{ tiene derivada } f'(x) = \sec^2(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$f(x) = \cotan(x) \text{ tiene derivada } f'(x) = -\text{cosec}^2(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$f(x) = \text{senh}(x) \text{ tiene derivada } f'(x) = \text{cosh}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \text{cosh}(x) \text{ tiene derivada } f'(x) = \text{senh}(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \tanh(x) \text{ tiene derivada } f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = a^x \text{ tiene derivada } f'(x) = \ln(a)a^x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0.$$

**Teorema 11** (Regla de la cadena). Sea  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  derivable en  $\bar{x} \in (a, b)$  y  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c, d)$ . Entonces  $g \circ f$  es derivable en  $\bar{x}$  con

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$$

**Teorema 12** (Derivadas de funciones inversas). Sea  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  biyectiva y continua. Si  $f$  es derivable en  $\bar{x} \in (a, b)$  con  $f'(\bar{x}) \neq 0$ , entonces la función inversa  $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$  es derivable en  $\bar{y} = f(\bar{x})$  con

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}.$$

**Observación** Más derivadas conocidas:

$$f(x) = \arcsin(x) \text{ tiene derivada } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in [-1, 1].$$

$$f(x) = \arctan(x) \text{ tiene derivada } f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

### 4 [Semana 4] Derivadas: Los teoremas

#### 4.1 Máximos y mínimos: la regla de Fermat

**Definición 6** Diremos que un punto  $\bar{x}$  es un mínimo local de la función  $f$  si existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \forall x \in (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon).$$

**Definición 7** Diremos que un punto  $\bar{x}$  es un máximo local de la función  $f$  si existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \forall x \in (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon).$$

**Teorema 13** Si  $\bar{x} \in (a, b)$  es mínimo local o máximo local de una función derivable  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $f'(\bar{x}) = 0$ .

## 4.2 El teorema del valor medio

**Teorema 14** (TVM). Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$ . Entonces existe  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi).$$

En particular, si  $g(x) = x$  se tiene

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

## 4.3 Algunas aplicaciones de la derivada

Una primera consecuencia directa del TVM es la llamada regla de l'Hôpital para el cálculo de límites de la forma  $0/0$  o  $\infty/\infty$ .

**Teorema 15** (Regla de l'Hôpital). Sean  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivables en  $(a, b)$ , tales que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = L$$

con  $L = 0$  o  $L = \infty$ , y  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que este último límite exista.

**Observación** La regla de l'Hôpital también se aplica para límites con  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow a$ , e incluso para límites con  $x \rightarrow \infty$  de la misma forma.

## 4.4 Derivadas y monotonía

**Teorema 16** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Si  $f'(x) \geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ) para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es creciente (resp. decreciente) en  $[a, b]$ . Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.

## 4.5 Derivadas y convexidad

**Definición 8** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice convexa si las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico, vale decir

$$f(z) \leq f(x) + \left[ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right] (z - x) \quad \forall x < z < y$$

o también

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

**Teorema 17** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Entonces  $f$  es convexa en  $[a, b]$  ssi  $f'$  es creciente en  $(a, b)$ .

**Observación** Análogamente,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice cóncava si las rectas secantes quedan por debajo del gráfico de la función. Esto equivale a la convexidad de  $-f$  y por lo tanto, en el caso diferenciable, a que  $f'$  sea decreciente.

## 4.6 Derivadas de orden superior

**Observación** Las derivadas de orden superior se definen inductivamente por

$$f^{[k]}(\bar{x}) := (f^{[k-1]})'(\bar{x}).$$

con la convención  $f^{[0]}(x) = f(x)$ . Notar que para que  $f$  tenga una derivada de orden  $k$  en  $\bar{x}$ ,  $f^{[k-1]}(x)$  debe existir al menos en un intervalo  $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$  y ser derivable en  $\bar{x}$ . Si  $f$  admite una derivada de orden  $k$  en todo punto de un intervalo  $(a, b)$ , entonces  $f^{[k-1]}$  (e inductivamente todas las derivadas de orden inferior a  $k$ ) son continuas en  $(a, b)$ . Diremos que  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^k(a, b)$  si es  $k$  veces derivable en todo punto del intervalo  $(a, b)$ , y la función  $f^{[k]} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Si esto es cierto para todo  $k$ , diremos que  $f$  es de clase  $C^\infty$ .

## 4.7 Desarrollos limitados

**Definición 9** Diremos que  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  posee un desarrollo limitado de orden  $k$  en torno al punto  $\bar{x} \in (a, b)$  si existen constantes  $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  tales que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - \bar{x}) + a_2(x - \bar{x})^2 + \dots + a_k(x - \bar{x})^k + o((x - \bar{x})^k)$$

con  $\lim_{u \rightarrow 0} o(u^k)/u^k = 0$ .

**Teorema 18** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k$ -veces derivable en  $\bar{x} \in (a, b)$ , y sea

$$T_f^k(h) := f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}h^k$$

su desarrollo de Taylor de orden  $k$  en torno a  $\bar{x}$ . Entonces

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + o((x - \bar{x})^k)$$

con  $\lim_{h \rightarrow 0} o(h^k)/h^k = 0$ .

## 4.8 Caracterización de puntos críticos

**Proposición 2** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k$  veces derivable en  $\bar{x} \in (a, b)$ , con  $f'(\bar{x}) = \dots = f^{[k-1]}(\bar{x}) = 0$  y  $f^{[k]}(\bar{x}) \neq 0$ ,  $k \geq 2$ . Entonces hay 3 casos posibles:

- Si  $k$  es par y  $f^{[k]}(\bar{x}) > 0$ ,  $\bar{x}$  es un mínimo local.
- Si  $k$  es par y  $f^{[k]}(\bar{x}) < 0$ ,  $\bar{x}$  es un máximo local.
- Si  $k$  es impar,  $\bar{x}$  es un punto de inflexión.

## 4.9 Fórmula de Taylor

La siguiente generalización del TVM permite calcular el error de aproximación que se comete al reemplazar una función por su desarrollo de Taylor.

**Teorema 19** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(k+1)$ -veces derivable en todo punto del intervalo  $(a, b)$ . Sea  $T_f^k(\cdot)$  el polinomio de Taylor de orden  $k$  en  $\bar{x} \in (a, b)$ . Entonces, para todo  $x > \bar{x}$  (resp.  $x < \bar{x}$ ) existe  $\xi \in (\bar{x}, x)$  (resp.  $\xi \in (x, \bar{x})$ ) tal que

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x - \bar{x})^{k+1}.$$

## 4.10 El método de Newton

Consideremos la ecuación  $f(x) = 0$  donde  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función derivable tal que  $f(a)f(b) < 0$ . En el capítulo de continuidad vimos que existe una solución  $x^* \in (a, b)$ , la cual podemos aproximar mediante el método de bisección. Dicho método, a pesar que nos asegura converger hacia  $x^*$ , es relativamente lento.

Usando la noción de derivada podemos construir un método iterativo más eficiente. Supongamos que disponemos de una aproximación de la solución  $x_0 \sim x^*$ . Si en la ecuación  $f(x) = 0$  reemplazamos la función  $f(\cdot)$  por su aproximación afín en torno a  $x_0$ , obtenemos la ecuación lineal  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$ . Si  $f'(x_0) \neq 0$ , la solución de esta ecuación linealizada es  $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ , la cual podemos considerar como una nueva aproximación de  $x^*$ , que esperamos sea más precisa.

La iteración de este procedimiento a partir de la nueva aproximación conduce a un método iterativo de la forma

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

el cual estará definido mientras se tenga  $f'(x_n) \neq 0$ . Esta iteración se conoce como el Método de Newton (para ecuaciones).

**Teorema 20** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  y supongamos que  $x^* \in (a, b)$  es una solución de la ecuación  $f(x^*) = 0$  tal que  $f'(x^*) \neq 0$ . Entonces existen constantes  $\epsilon > 0$  y  $M > 0$  tales que para todo punto de partida  $x_0 \in I_\epsilon := (x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$  el método de Newton está bien definido y converge hacia  $x^*$  con

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2.$$

## 5 Primitivas

**Definición 10** (Primitiva) Una función  $F$  continua en un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  y derivable en  $\text{Int}(I)$ , se llama primitiva de una función  $f$  sobre  $I$  ssi

$$\forall x \in \text{Int}(I), F'(x) = f(x).$$

**Observación** Dos primitivas de una función difieren a lo más en una constante. Si  $F$  es una primitiva de  $f$ , entonces la función  $F + c$ , con  $c \in \mathbb{R}$  arbitraria, es otra primitiva de  $f$ .

**Observación** El conjunto de todas las primitivas de  $f$  se anota como  $\int f$ . Si  $F$  es una primitiva de  $f$ , entonces notaremos:

$$\int f = F + c.$$

Es habitual, usar la notación clásica:

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

donde  $dx$  corresponde a un símbolo que sirve para identificar a la variable.

### 5.1 Primitivas o integrales indefinidas inmediatas

A continuación se presentan algunas primitivas cuyo cálculo es elemental:

$$\text{i) } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \forall n \neq -1.$$

$$\text{ii) } \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c = \ln(K|x|), K > 0.$$

$$\text{iii) } \int \text{sen}(x)dx = -\text{cos}(x) + c.$$

$$\text{iv) } \int \text{cos}(x)dx = \text{sen}(x) + c.$$

$$\text{v) } \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c.$$

$$\text{vi) } \int \text{senh}(x)dx = \text{cosh}(x) + c.$$

$$\text{vii) } \int \text{cosh}(x)dx = \text{senh}(x) + c.$$

$$\text{viii) } \int \text{sec}^2(x)dx = \text{tan}(x) + c.$$

$$\text{ix) } \int \text{cosec}^2(x)dx = \text{cotan}(x) + c.$$

$$\text{x) } \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctan}(x) + c.$$

$$\text{xi) } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsen}(x) + c.$$

$$\text{xii) } \int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + c.$$

**Observación** 1.  $\int f'(x)dx = f(x) + c$ ,  $\int f' = f + c$ .

$$2. \frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x), \left( \int f \right)' = f.$$

**Proposición 3**  $\int$  es un operador lineal, es decir:

$$1. \int f \pm g = \int f \pm \int g.$$

$$2. \int \alpha f = \alpha \int f, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

### 5.2 Teorema de cambio de variable

**Teorema 21** (Cambio de variable). Si  $u = g(x)$ , entonces

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x) \cdot g'(x)dx \text{ o, equivalentemente } \int f = \int (f \circ g) \cdot g'.$$

## 6 Primitivas (2)

### 6.1 Integración por partes

**Proposición 4** (Fórmula de integración por partes). Sean  $u$  y  $v$  dos funciones de  $x$ , entonces:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$\text{o, equivalentemente } \int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'$$

**Observación** Usualmente la fórmula de integración por partes se escribe de manera más compacta como

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

donde  $dv = v'(x)dx$  y  $du = u'(x)dx$ .

## 6.2 Sustituciones trigonométricas tradicionales

Cuando en una integral figuren expresiones del tipo que se indica, los siguientes cambios de variable son convenientes:

1. Para  $a^2 + x^2$ , usar  $x = a \tan(v)$  o bien  $x = a \operatorname{senh}(t)$ .
2. Para  $a^2 - x^2$ , usar  $x = a \operatorname{sen}(v)$  o bien  $x = a \operatorname{cos}(v)$ .
3. Para  $x^2 - a^2$ , usar  $x = a \operatorname{sec}(v)$  o bien  $x = a \operatorname{cosh}(t)$ .

## 6.3 Integración de funciones racionales

Se desea integrar funciones  $R(x)$  de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0},$$

con  $n < m$ .

Si suponemos que el polinomio  $Q(x)$  se ha factorizado de la siguiente forma:

$$Q(x) = b_m (x - r_1)^{\alpha_1} \dots (x - r_s)^{\alpha_s} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + b_t x + c_t)^{\beta_t}$$

En donde  $r_1, \dots, r_s$  son las raíces de  $Q$ , de multiplicidades  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ , y  $\beta_1, \dots, \beta_t$  son números enteros positivos, con  $x^2 + b_i x + c_i$  polinomios irreducibles.

Entonces  $R(x)$  es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:

1. Por cada término  $(x - r_i)^{\alpha_i}$  aparece la suma de  $\alpha_i$  funciones:

$$\frac{A_{1i}}{(x - r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x - r_i)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x - r_i)^{\alpha_i}}.$$

2. Por cada término  $(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}$  aparece la suma de  $\beta_i$  funciones de la forma:

$$\frac{B_{1i} x + C_{1i}}{x^2 + b_i x + c_i} + \frac{B_{2i} x + C_{2i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_i i} x + C_{\beta_i i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}}$$

## 6.4 Integrales trigonométricas reducibles a integrales de funciones racionales

Consideramos integrales del tipo

$$\int R(\operatorname{sen}(x), \operatorname{cos}(x)) dx,$$

en donde  $R$  es una función racional en la cual aparecen sólo  $\operatorname{sen}(x)$  y  $\operatorname{cos}(x)$ .

En estos casos se aconseja el cambio de variable:

$$t = \tan(x/2),$$

con lo cual

$$dt = \frac{1}{2} \operatorname{sec}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

Pero por otra parte,  $\arctan(t) = x/2$ , de donde

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{dx}{2}.$$

Combinando ambas igualdades obtenemos que

$$\operatorname{cos}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Usamos entonces unas conocidas identidades trigonométricas para el seno y el coseno de un ángulo doble, con lo que

$$\operatorname{sen}(x) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\operatorname{cos}(x) = \operatorname{cos}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

En resumen,

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad \operatorname{sen}(x) = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right), \quad \operatorname{cos}(x) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right), \quad dx = \left(\frac{2dt}{1+t^2}\right).$$