Resumen Cálculo Diferencial e Integral

Nicolás Fuenzalida Sáez

1 [Semana 1] Subsucesiones y Continuidad

Definición 1 *(Subsucesión). Sea (s_n) una sucesión. Sea $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Se llama subsucesión de s_n genera por ϕ, a la sucesión (u_n), definida por:*

$$u_n = s_{\phi(n)}$$

Teorema 1 *Sea (s_n) una sucesión y sea $l \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$s_n \to l \iff \text{Todas las subsucesiones de } (s_n) \text{ convergen a } l$$

Teorema 2 *(Bolzano-Weierstrass). Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

1.1 Funciones continuas

Definición 2 *(Función continua en un punto). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una función continua en $\bar{x}$ si*

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \bar{x} \implies f(x_n) \to f(\bar{x})$$

Teorema 3 *(Álgebra de funciones continuas). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Las siguientes funciones resultan ser continuas en $\bar{x}$:*

1. *$f + g$.*
2. *$f - g$.*
3. *λf, con $\lambda \in \mathbb{R}$.*
4. *$f \cdot g$.*
5. *f/g, cuando $g(\bar{x}) \neq 0$.*

Teorema 4 *(Composición de funciones continuas). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua en $\bar{x} \in A$ y g es continua en $f(\bar{x}) \in B$, entonces la función $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$.*

Teorema 5 *(Caracterización ϵ - δ). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. f es continua en $\bar{x}$ ssi se cumple que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A\{|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| \leq \epsilon\}$$

Observación Con esta propiedad, podemos establecer la conexión entre continuidad y límite de funciones, si el dominio de la función permite estudiar el límite de $f(x)$ cuando $x \to \bar{x}$ y $\bar{x} \in A$ se tiene que:

$$f \text{ es continua en } \bar{x} \text{ ssi } \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

Definición 3 *(Función continua). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua.*

Observación Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que existe una constante $L \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para todo $x, y \in A$ (una función con estas características se le dice Lipschitziana de parámetro L).

2 [Semana 2] Continuidad. Los grandes teoremas

2.1 El teorema de los valores intermedios

Teorema 6 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.*

Como corolario inmediato del teorema anterior, se obtiene la Propiedad de Darboux o Teorema de los Valores Intermedios:

Teorema 7 *(TVI). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$ entonces para todo número e comprendido entre c y d, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = e$.*

2.2 Máximos y mínimos: el teorema de Weierstrass

Teorema 8 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y máximo en $[a, b]$.*

2.3 Continuidad de las funciones inversas

Teorema 9 *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.*

2.4 Continuidad uniforme

Ya vimos la noción de continuidad en términos de sucesiones, y usando la caracterización ϵ - δ. Vale la pena notar que en general δ depende de ϵ y del punto $\bar{x}$, es decir, $\delta = \delta(\epsilon, \bar{x})$. Veamos ahora que para ciertas funciones es posible encontrar $\delta > 0$ que satisface la propiedad ϵ - δ independientemente del punto $\bar{x}$ en consideración:

Definición 4 *La función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$(\forall x, y \in A)|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

Observación Una función uniformemente continua resulta ser continua en todo su dominio, es decir, siempre se tiene que

$$f \text{ es función uniformemente continua } \implies f \text{ es función continua.}$$

Veamos condiciones para obtener la recíproca:

Teorema 10 *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces*

f es uniformemente continua ssi ella es continua en todo punto $\bar{x} \in A$.

3 [Semana 3] Derivadas

3.1 Funciones derivables

Definición 5 *Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\bar{x} \in (a,b)$, si existe el límite*

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}$$

Dicho límite se denota $f'(\bar{x})$ o bien $\frac{df}{dx}(\bar{x})$ y se llama derivada de f en $\bar{x}$.

Observación De manera equivalente, f es derivable en $\bar{x}$ si existe una pendiente $m = f'(\bar{x})$ tal que la función afín $a(x) = f(\bar{x}) + f'(x)(x-\bar{x})$ es una aproximación de f en el sentido que

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + o(x-\bar{x})$$

con $\lim_{h\to 0} o(h)/h = 0$. Usando el cambio de variable $h = x - \bar{x}$, lo anterior puede escribirse equivalentemente

$$f'(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h}$$

o también
$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h).$$

Notemos que si f es derivable en $\bar{x}$ entonces es continua en dicho punto.

Observación Algunas derivadas conocidas:

$$f(x) = a + bx \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = b,\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$
$$f(x) = x^2 \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = 2\bar{x},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$
$$f(x) = sen(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = cos(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$
$$f(x) = cos(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = -sen(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$
$$f(x) = exp(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = exp(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$
$$f(x) = ln(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^+.$$

3.2 Reglas de cálculo de derivadas

Proposición 1 *Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en $\bar{x} \in (a,b)$. Entonces:*

(a) $f+g$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(f+g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + g'(\bar{x})$$

(b) fg es derivable en $\bar{x}$ con

$$(fg)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x})$$

(c) Si $g(\bar{x}) \neq 0$ entonces f/g es derivable en $\bar{x}$ con

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}$$

Observación Más derivadas conocidas:

$$f_n(x) = x^n \text{ tiene derivada } f_n'(\bar{x}) = n\bar{x}^{n-1},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$
$$f_n(x) = x^{-n} \text{ tiene derivada } f_n'(\bar{x}) = -n\bar{x}^{-n-1},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$
$$p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k \text{ tiene derivada}$$
$$p'(\bar{x}) = a_1 + 2a_2\bar{x} + 3a_3\bar{x}^2 + \ldots + na_n\bar{x}^{n-1},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$
$$f(x) = tan(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = sec^2(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2{+}k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$
$$f(x) = cotan(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = -cosec2(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$
$$f(x) = senh(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = cosh(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$
$$f(x) = cosh(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = senh(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$
$$f(x) = tanh(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = \frac{1}{cosh^2(\bar{x})},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$
$$f(x) = a^x \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = ln(a)a^{\bar{x}},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}, \forall a > 0.$$

Teorema 11 *(Regla de la cadena). Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ derivable en $\bar{x} \in (a,b)$ y $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c,d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\bar{x}$ con*

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$$

Teorema 12 *(Derivadas de funciones inversas). Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\bar{x} \in (a,b)$ con $f'(\bar{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x})$ con*

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}.$$

Observación Más derivadas conocidas:

$$f(x) = arcsin(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{x}^2}},\ \forall \bar{x} \in [-1,1].$$

$$f(x) = arctan(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = \frac{1}{1+\bar{x}^2},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$