

# Semana 1: Sesión RP N° 1

## Continuidad y propiedades de funciones

Profesor: Patricio Felmer  
Auxiliares: Iñaki Escobar, Nicolás Fuenzalida

### **P1.-** Continuidad en el cero: ¿Cuál sobrevive?

¿Cuál de las siguientes funciones son continuas en 0?

1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

### **P2.-** El positivo perseverante

Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, donde  $I$  es un intervalo. Sea  $a$  un elemento interior de  $I$  tal que  $f(a) > 0$ . Muestre que existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) > 0$  para  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

### **P3.-** Punto de transición

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y sea  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) < 0$  en  $(-\infty, c)$  y  $f(x) > 0$  en  $(c, +\infty)$ . ¿Cuál es el valor de  $f(c)$ ?

### **P4.-** Explorando funciones Lipschitzianas

Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice  $L$ -Lipschitz con  $L \geq 0$  si

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Muestre que toda función Lipschitziana es continua. ¿Puedes dar un ejemplo de una función de tipo Lipschitz?