

MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.

Profesor: Cristián Reyes.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo

5 de diciembre de 2023



AUXILIAR 15

Series de Potencias y Más

Problema 1. Calcule el radio e intervalo de convergencia para las siguientes series de potencias.

$$a). \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

$$c). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$$

$$b). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^{3/2}}$$

$$d). \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$$

Solución. a). Mediante el criterio de cociente,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 \implies R = 1/\rho = 1.$$

Ahora, para determinar el intervalo de convergencia evaluemos en los extremos ($x = \pm R$).

$$x = 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} n^2 > +\infty.$$

Claramente dicha serie diverge, ahora el otro extremo:

$$x = -1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (-1)^n \text{ diverge.}$$

Dado que su término general no converge a 0. Luego el intervalo es $I = (-1, 1)$.

b). Usamos la raíz n -ésima:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{(n^{1/n})^{3/2}} = 5 \implies R = 1/5.$$

Evaluando ahora en los extremos:

$$x = -1/5 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} < +\infty$$

Mediante el criterio de Leibnitz, esta serie converge. Evaluamos en el otro extremo:

$$x = 1/5 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

y esta serie converge dado que $3/2 > 1$.

c). Usamos criterio de cociente:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} n!}{(n+1)! 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Como $\rho = 0$, entonces $R = \infty$ con lo que el intervalo de convergencia es $I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

- d). Considerando el criterio de la raíz n -ésima (para la serie $\sum 4^n x^n$), es directo que $\rho = 4$ con lo que $R = 1/4$, (reemplazando x por x^2 en la expresión anterior,) luego $x^2 < 1/4 \implies |x| < 1/2$. Ahora, analizamos los bordes:

$$x = 1/2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum 1 > +\infty$$

Finalmente:

$$x = -1/2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4^n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum (-1)^n$$

lo que tampoco converge pues $(-1)^n \not\rightarrow 0$. Por lo tanto $I = (-1/4, 1/4)$. □

Problema 2. Obtenga un desarrollo en serie de potencias para la función

$$f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x}{(1+x)^2}$$

Hint: suma geométrica.

Solución. Notemos que, para $u \in (-1, 1)$,

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

con lo que, $\forall x \in (-1, 1)$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

derivando a ambos lados con respecto a x , se tiene que

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} -n(-x)^{n-1}$$

Se sigue lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^2} &= - \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1} \\ \implies \frac{2x}{(1+x)^2} &= -2x \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1} \\ \implies \frac{2x}{(1+x)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2n x^n \end{aligned}$$

□

Problema 3. Considere la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}.$$

Encuentre su intervalo de convergencia y demuestre que f cumple la ecuación diferencial $f' = 1/2 f$ con condición inicial $f(0) = 1$. Finalmente, encuentre una expresión cerrada para f considerando f/g para alguna otra solución de la ecuación.

Solución. Se tiene que

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{x^n}{2^n n!}} = \frac{x}{2(n+1)} \rightarrow 0.$$

Esto siendo verdad para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que el radio de convergencia es $R = \infty$. Además,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} \\ &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} + 1 \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{2^n n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n (n-1)!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^{n-1} (n-1)!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} \\ &= \frac{1}{2} f(x) \end{aligned}$$

además, es claro que $f(0) = 1$

$$\therefore \begin{cases} f' = \frac{1}{2}f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Consideremos ahora $f(x)e^{-x/2}$. Se tiene que

$$\frac{d}{dx} f(x)e^{-x/2} = f'(x)e^{-x/2} - f(x)\frac{1}{2}e^{-x/2} = \frac{1}{2}f(x)e^{-x/2} - \frac{1}{2}f(x)e^{-x/2} = 0$$

Con esto, $f(x)e^{-x/2} = c$ para alguna constante $c \in \mathbb{R}$. Utilizando la condición inicial ($x = 0$), se concluye que $c = 1$. Multiplicando a ambos lados por $e^{x/2}$, concluimos que $f(x) = e^{x/2}$. $\square$

Problema 4. Demuestre lo siguiente

a). $\forall x > 0, 1 + \log x < (x+1)\log(x+1) - x\log x < 1 + \log(x+1)$

b). *cos es uniformemente continua.*

Solución. a). Sea $x > 0$. Por el TVM, se tiene que existe $\xi \in (x, x+1)$ tal que

$$\frac{(x+1)\log(x+1) - x\log x}{x+1-x} = \frac{d}{dy} y \log y|_{y=\xi}$$

con lo que

$$(x+1)\log(x+1) - x\log x = \log(\xi) + 1$$

notando que $\log$ es una función creciente y que $x < \xi < x+1$ con lo que $\log(x) + 1 < \log(\xi) + 1 < \log(x+1) + 1$ con lo que

$$\log(x) + 1 < (x+1)\log(x+1) - x\log x < \log(x+1) + 1$$

b). Sea $\varepsilon > 0$. Sea $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $|x - y| < \varepsilon$. Por el TVM, sea $\xi \in (x, y)$ tal que

$$\frac{\cos(y) - \cos(x)}{y - x} = -\sin(\xi).$$

Aplicando valor absoluto y notando que $|\sin(\xi)| \leq 1$, se sigue que

$$|\cos(y) - \cos(x)| \leq |y - x|.$$

Como $|y - x| < \varepsilon$, se concluye que

$$|\cos(y) - \cos(x)| < \varepsilon.$$

Con lo que $\cos$ es absolutamente continua. □

Problema 5. Sea $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua y creciente en $[0, 1]$ con $g(0) = 0$. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(1/n) < \infty \iff \int_0^1 \frac{g(x)}{x^2} dx < \infty.$$

Solución. Sea $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida mediante $x \mapsto g(1/x)$. Con esto, como g es creciente, f es decreciente. Además, f es continua pues g es continua y $1/x$ es continua en $[1, +\infty)$. Del criterio de la integral impropia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(1/n) < \infty \iff \int_1^{\infty} g(1/x) dx < \infty$$

Además,

$$\int_1^{\infty} g(1/x) dx = \int_1^0 \frac{g(x)}{-x^2} dx = \int_0^1 \frac{g(x)}{x^2} dx$$

con lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(1/n) < \infty \iff \int_0^1 \frac{g(x)}{x^2} dx < \infty.$$

□