MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo
5 de diciembre de 2023

Auxiliar 15

Series de Potencias

Problema 1. *Calcule el radio e intervalo de convergencia para las siguientes series de potencias.*

a). $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

b). $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^{3/2}}$

c). $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$

d). $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$

Problema 2. *Obtenga un desarrollo en serie de potencias para la función*

$$\begin{aligned} f\colon (-1,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Hint: suma geométrica.

Problema 3. *Considere la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}.$$

Encuentre su intervalo de convergencia y demuestre que f *cumple la ecuación diferencial* $f' = 1/2 f$ *con condición inicial* $f(0) = 1$. *Finalmente, encuentre una expresión cerrada para* f *considerando* f/g *para alguna otra solución de la ecuación.*

Problema 4. *Demuestre lo siguiente*

a). $1 + \log x \leq (x+1)\log(x+1) - x\log x < 1 + \log(x+1)$

b). $\cos$ *es uniformemente continua.*

Problema 5. *Sea* $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$ *continua y creciente en* $[0,1]$ *con* $g(0) = 0$. *Demuestre que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(1/n) < \infty \iff \int_0^1 \frac{g(x)}{x^2}\, dx < \infty.$$

Apéndice.

Definición (Uniforme continuidad). Una función $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **uniformemente Continua** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un δ tal que

$$\forall x, y \in A,\ |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Teorema (TVM). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. y derivable en (a,b). Entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Definición (Serie). Una serie es un par ordenado $(A,(a_n))$ donde A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ numerable $(a_n)_{\mathbb{N}}$ es una numeración (ordenamiento) del conjunto A.
La sucesión (a_n) se llama el término general de la serie. A partir de (a_n) definamos la sucesión (s_n) de las sumas parciales $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. El valor de la serie existe cuando la sucesión (s_n) posee límite. En tal caso decimos que la serie es **convergente** y su valor es el límite de (s_n).
Teorema (Álgebra de series). Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergente. Entonces

1. $\sum (a_k + b_k)$ es convergente y su valor es $(\sum a_k) + (\sum b_k)$.
2. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum (\lambda a_k)$ es convergente y su valor es $\lambda \left(\sum a_k\right)$.

Teorema (Monótona y Acotada). Una serie de términos no negativos converge si y sólo si las sumas parciales son acotadas superiormente.
Teorema (Mayoración de Series). Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones no negativas de modo que existen n_0 y $\alpha > 0$ tales que, para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k \leq \infty$ entonces $\sum a_k \leq \infty$.
Teorema (Comparación por Cuociente). Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que, para todo $n \geq 0$, $0 < a_n, b_n$ y supongamos que $c := \lim a_n/b_n$ existe. Se tiene las siguientes afirmaciones dependiendo del valor de c.

1. Caso $c = 0$. Si $\sum b_k < \infty$ entonces $\sum a_k < \infty$.
2. Caso $c > 0$. Se tiene que $\sum b_k < \infty$ si y sólo si $\sum a_k < \infty$.

Teorema (Criterio de Cuociente). Sea (a_n) una sucesión de términos positivos y supongamos que $r := \lim a_{n+1}/a_n$ existe. Dependiendo del valor de r se tienen las siguientes conclusiones.

1. Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
2. Si $r > 1$ o $r = \infty$, entonces $\sum a_k$ diverge.
3. Si $r = 1$ entonces $\sum a_k$ puede converger o divergir.

Teorema (Criterio de la Integral Impropia). Sea $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}^+$ una función decreciente. Se tiene que $\sum_{n\geq 1} f(n) < \infty$ equivale a $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$.
Teorema (Criterio de la Raíz n-ésima). Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos y $u_n = (a_n)^{1/n}$. Sea $r = \limsup u_n$. Entonces,

1. Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
2. Si $r > 1$ o $r = \infty$, entonces $\sum a_k$ diverge.
3. Si $r = 1$ entonces $\sum a_k$ puede converger o divergir.

Definición (Convergencia Absoluta). Sea $\sum a_k$ una serie con (a_k) una sucesión cualquiera. Decimos que la serie es **absolutamente convergente** si $\sum |a_k| < \infty$.
Teorema (Abs. Convergente $\implies$ convergente). Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además, una serie es absolutamente convergente si y sólo si las series de sus términos negativos y la serie de sus términos positivos son convergentes.
Teorema (Criterio de Leibnitz). Sea (a_n) una sucesión decreciente y convergente a cero. Entonces la serie $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.
Definición (Serie de potencias). Una serie de potencias es una serie en donde el término general es de al forma $a_k(x-\alpha)^k$ (usualmente, $\alpha = 0$).
Proposición (Convergencia en intervalos). Si la serie $\sum a_k x_0^k$ converge, se tiene que para cada $a \in (0, |x_0|)$ y para todo $x \in [-a, a]$, la serie $\sum a_k x^k$ converge absolutamente.
Definición (Radio de Convergencia). El radio de convergencia de una serie de potencias $\sum a_k x^k$ queda definido mediante

$$R := \sup \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum a_k x^k < \infty \right\}.$$

Definición (Intervalo de Convergencia). Llamamos **intervalo de convergencia** I al conjunto de reales x para los cuales la serie $\sum a_k x^k$ converge. Tenemos que $(-R,R) \subseteq I \subseteq [-R,R]$.
Teorema (Integración). Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias, con radio de convergencia $R > 0$. Entonces la función f definida como $x \mapsto \sum a_k x^k$, es integrable en $(-R,R)$ y

$$\forall x \in (-R,R),\ \int_0^x f = \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}$$

Teorema (Diferenciación). Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias, con radio de convergencia $R > 0$. Entonces la función f definida como $x \mapsto \sum a_k x^k$, es derivable en $(-R,R)$ y

$$\forall x \in (-R,R),\ f' = \sum k a_k x^{k-1}$$