MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo
21 de noviembre de 2023

Pauta Auxiliar 13

Series

Problema 1. *Determine la convergencia de las siguientes series:*

a). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

b). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

c). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

d). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

Solución. a). Notemos que, para $n \geq 1$, se tiene que $n^2 \geq 1$ y $2n^2 \geq n^2+1$ (en particular, $(2n)^2 \geq n^2+1$) y obtenemos $(2n)^{2/3} \geq \sqrt[3]{n^2+1}$ y concluimos que

$$\frac{1}{2^{2/3}}\frac{1}{n^{2/3}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$$

con lo que, con el contrarecíproco del teorema de Mayoración de Series, se concluye que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ diverge (pues $\sum \frac{1}{n^{2/3}}$ diverge).

b). Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2/(n+1)!}{n^2/n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

y se concluye que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ converge por el criterio del cuociente.

c). Se tiene que

$$\int_1^N \frac{\log(x)}{x}\,dx = \int_0^{\log N} u\,du = \frac{\log^2 N}{2} \to \infty$$

y, como $\log(x)/x$ es decreciente a partir de $x = e$ (pues $d/dx\, log(x)/x = \frac{1-\log x}{x^2}$. Esta función fue profundamente estudiada en el aux pre-control 1). Con esto, por el criterio de la integral impropia, se concluye que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ diverge.

d). Notemos que

$$\frac{1}{n^{1+1/n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^{1/n}}.$$

Por la comparación por cuociente para $a_n = 1/(n^{1+1/n})$ y $b_n = 1/n$. Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 > 0.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge, se sigue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ diverge.

□

Problema 2. *Calcule la convergencia de las siguientes integrales:*

a). $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^a+x^b}$; $0<a<1<b$. *b).* $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}$

Solución. a).

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^a+x^b} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^a+x^b}}_{:=I_0} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{x^a+x^b}}_{:=I_1}$$

Mostraremos que I_i converge. Notemos que en $(0,1]$ se tiene que

$$0 \le \frac{1}{x^a+x^b} \le \frac{1}{x^a}$$

con lo que I_0 converge si $\int_0^1 \frac{1}{x^a}$ converge. Como $a<1$, se concluye que I_0 converge. De manera similar, notemos que en $[1,\infty)$ se tiene que

$$0 \le \frac{1}{x^a+x^b} \le \frac{1}{x^b}$$

con lo que I_1 converge si $\int_1^\infty \frac{1}{x^b}$ converge. Como $b>1$, se concluye que I_1 converge.

$$\therefore \int_0^\infty \frac{dx}{x^a+x^b} \text{ converge.}$$

b).

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}} = \underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}}_{I_1} + \underbrace{\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}}_{I_2}.$$

Notemos que en $(1,2]$,

$$\begin{aligned}
x \le 2 &\implies x^2 \le 4\\
&\implies 9-x^2 \ge 5\\
&\implies (9-x^2)(x-1) \ge (x-1)5\\
&\implies \sqrt{(9-x^2)(x-1)} \ge \sqrt{(x-1)5}\\
&\implies 0 \le \frac{1}{\sqrt{(9-x^2)(x-1)}} \le \frac{1}{\sqrt{(x-1)5}}.
\end{aligned}$$

y, como

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{5(x-1)}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}} 2\sqrt{x-1}\ |_1^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

y, por el criterio de comparación, I_1 converge.

Ahora, notemos que en $[2,3)$,

$$\begin{aligned}
x \ge 2 &\implies x-1 \ge 1\\
&\implies (x-1)(9-x^2) \ge 9-x^2\\
&\implies \sqrt{(x-1)(9-x^2)} \ge \sqrt{9-x^2}\\
&\implies \frac{1}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}} \le \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\\
&\implies \frac{1}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}} \le \frac{1}{\sqrt{(3-x)(3+x)}}\\
&\implies 0 \le \frac{1}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}} \le \frac{1}{\sqrt{(3-x)5}}
\end{aligned}$$

donde se usó que $3+x \geq 5$ en al última desigualdad. Notando que

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x)5}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\sqrt{3-x})\mid_2^3 = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

se concluye, mediante el criterio de comparación, que I_2 converge. Como I_1 y I_2 convergen, se sigue que $I_1 + I_2 = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}$ converge.

□

Problema 3. *a). Sea (a_n) una secuencia de naturales con $0 \leq a_n \leq 9$. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-1}$ existe y se encuentra entre 0 y 1.*

b). Suponga que $0 \leq x \leq 1$. Demuestre que existe una sucesión de naturales (a_n) con $0 \leq a_n \leq 9$ con $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = x$.

c). Muestre que si (a_n) es periódico, es decir, es de la forma $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, a_2, \ldots,$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ es racional (y encuentre su expresión racional). Además, encuentre una expresión racional para $0.\overline{321}$.

Solución. a). Se tiene que si $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n} &\leq 9 \sum_{n=1}^{N} \left(10^{-1}\right)^n \\
&= 9\left(-1 + \sum_{n=0}^{N} \left(10^{-1}\right)^n\right) \\
&\leq -9 + 9 \sum_{n=0}^{\infty} \left(10^{-1}\right)^n \\
&= -9 + 9\frac{1}{1-10^{-1}} \\
&= -9 + 9\frac{1}{\frac{9}{10}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Con esto, como $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq a_n 10^{-n}$ y las sumas parciales están acotadas superiormente, se concluye que la serie converge y, como el límite preserva el orden, se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} \leq 1$ (es claro que la serie también es positiva y por lo que es mayor que 0).

b). Si $x = 1$, entonces $a_n = 9$ nos lleva a

$$\sum 9 \cdot 10^{-n} = 9 \sum 10^{-n} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1.$$

Si $x \in [0, 1)$, entonces: sea $a_1 = [10x]$ y $a_n = [10^n x - (10^{n-1} a_1 + \cdots + 10 a_{n-1})]$. Notemos que $0 \leq a_1 \leq 9$ y, para cada n,

$$0 \leq 10^n x - (10^{n-1} a_1 + \cdots + 10 a_{n-1}) - a_n < 1$$

con lo que, multiplicando por 10 se tiene que

$$0 \leq 10^{n+1} x - (10^n a_1 + \cdots + 10^2 a_{n-1} + 10 a_n) < 10 \tag{1}$$

y se concluye que $0 \geq [a_n] \leq 9$. De (1) se sigue que

$$0 \leq x - \sum_{m=1}^{n} a_m 10^{-m} \leq 10^{-n}$$

y se concluye con sándwich que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$.

c). Sea $\alpha = \sum_{j\in 1}^{k} a_j 10^{k-j} \in \mathbb{N}$. Se tiene que (donde en la primera igualdad, asociamos en grupos de k elementos, esto es, introducimos paréntesis en la suma agrupando los números en grupos de k elementos y luego sumamos estos grupos. Notemos que, cuando $n = 1$, la suma sobre j corresponde a los primeros k elementos, cuando $n = 2$, la suma sobre j corresponde a la suma de los elementos desde $k + 1$ hasta $2k$ (el segundo grupo de k elementos) y así para el resto de los n),

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in 1}^{k} a_{k(n-1)+j} 10^{-k(n-1)-j} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in 1}^{k} a_j 10^{-k(n-1)-j} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in 1}^{k} \frac{a_j 10^{k-j}}{10^{nk}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{j\in 1}^{k} a_j 10^{k-j}}{10^{nk}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{10^{nk}} \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^k}\right)^n \\ &= \frac{\alpha}{10^k - 1}.\end{aligned}$$

Ejemplo: si quiero escribir $0.\overline{321}$ como fracción, escribo $\frac{321}{999}$ y tengo la representación del numero decimal como fracción (donde $\alpha = 321$ y $k = 3$).

□

Problema 4. (Propuesto)[1]**.**
Definición (Cesaro Sumable). Decimos que una sucesión de reales (a_n) es **Cesaro Sumable** con suma de Cesaro l si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = l$$

donde $s_n = a_1 + \cdots + a_n$.

a). *Muestre que si una sucesión tiene serie convergente, entonces es Cesaro sumable y, además, la suma de Cesaro coincide con el valor de la serie.*

b). *Encuentre una sucesión que no sea sumable (en el sentido de serie convergente) pero que sí sea Cesaro sumable.*

[1]**Hint:** Esta es la conclusión de una lista de problemas del Spivak. La secuencia de problemas es la siguiente: Prob. 40 Cap. 13 - Prob. 16 Cap. 22 - Prob. 9 Cap. 23. Los primeros dos problemas tiene un "*" en el libro, señalando su dificultad.