MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo
21 de noviembre de 2023

Auxiliar 13

Series

Problema 1. *Determine la convergencia de las siguientes series:*

a). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

b). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

c). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

d). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

Problema 2. *Calcule la convergencia de las siguientes integrales:*

a). $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^a + x^b}$; $0 < a < 1 < b$.

b). $\displaystyle\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}$

Problema 3. *a). Sea (a_n) una secuencia de naturales con $0 \leq a_n \leq 9$. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-1}$ existe y se encuentra entre 0 y 1.*

b). Suponga que $0 \leq x \leq 1$. Demuestre que existe una sucesión de naturales (a_n) con $0 \leq a_n \leq 9$ con $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = x$.

c). Muestre que si (a_n) es periódico, es decir, es de la forma $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, a_2, \ldots,$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ es racional (y encuentre su expresión racional). Además, encuentre una expresión racional para $0.\overline{321}$.

Problema 4. (Propuesto)[1].
Definición (Cesaro Sumable). Decimos que una sucesión de reales (a_n) es **Cesaro Sumable** con suma de Cesaro l si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = l$$

donde $s_n = a_1 + \cdots + a_n$.

a). Muestre que si una sucesión tiene serie convergente, entonces es Cesaro sumable y, además, la suma de Cesaro coincide con el valor de la serie.

b). Encuentre una sucesión que no sea sumable (en el sentido de serie convergente) pero que sí sea Cesaro sumable.

[1]**Hint:** Esta es la conclusión de una lista de problemas del Spivak. La secuencia de problemas es la siguiente: Prob. 40 Cap. 13 - Prob. 16 Cap. 22 - Prob. 9 Cap. 23. Los primeros dos problemas tiene un "*" en el libro, señalando su dificultad.

Apéndice.

Definición (Integral Impropia de Primera Especie). Sea $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ diremos que f es integrable en $[a,\infty)$ si se cumple que:

(I) $\forall x \in (a,\infty)$, f es integrable en $[a,x]$ y además

(II) Existe el límite definido por $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$.

Denotamos este límite por $\int_a^\infty f$.
Se define $\int_{-\infty}^b f$ de manera similar.
Se define $\int_{-\infty}^\infty f$ mediante $\int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f$ si ambas integrales convergen.
Definición (Integral Impropia de Segunda especie). Sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ una función no acotada, diremos que f es integrable en $[a,b)$ si

(I) $\forall x \in (a,b)$, f es integrable en $[a,x]$,

(II) El límite $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ existe.

Las notaciones y versiones alternativas son similares al caso de primera especie.
Definición (Integral Impropia de Tercera Especie). Son las funciones que se obtienen combinando integrales impropias de primera y segunda especie. Este tipo de integrales se dirá convergente si cada una de sus componentes es una integral convergente.
Teorema (Criterio de Comparación). Sean f y g funciones continuas en $[a,\infty)$ tales que

$$\exists b \geq a, \forall x \geq b,\ 0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Entonces, si $\int_a^\infty g$ converge, entonces $\int_a^\infty f$ converge.
Para integrales impropias de la segunda especie, el teorema es análogo.
Definición (Serie). Una serie es un par ordenado $(A,(a_n))$ donde A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ numerable $(a_n)_{\mathbb{N}}$ es una numeración (ordenamiento) del conjunto A.
La sucesión (a_n) se llama el término general de la serie. A partir de (a_n) definamos la sucesión (s_n) de las sumas parciales $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. El valor de la serie existe cuando la sucesión (s_n) posee límite. En tal caso decimos que la serie es **convergente** y su valor es el límite de (s_n).
Teorema (Álgebra de series). Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergente. Entonces

1. $\sum(a_k + b_k)$ es convergente y su valor es $(\sum a_k) + (\sum b_k)$.

2. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum(\lambda a_k)$ es convergente y su valor es $\lambda(\sum a_k)$.

Teorema (Monótona y Acotada). Una serie de términos no negativos converge si y sólo si las sumas parciales son acotadas superiormente.
Teorema (Mayoración de Series). Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones no negativas de modo que existen n_0 y $\alpha > 0$ tales que, para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k \leq \infty$ entonces $\sum a_k \leq \infty$.
Teorema (Comparación por Cuociente). Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que, para todo $n \geq 0$, $0 < a_n, b_n$ y supongamos que $c := \lim a_n/b_n$ existe. Se tiene las siguientes afirmaciones dependiendo del valor de c.

1. Caso $c = 0$. Si $\sum b_k < \infty$ entonces $\sum a_k < \infty$.

2. Caso $c > 0$. Se tiene que $\sum b_k < \infty$ si y sólo si $\sum a_k < \infty$.

Teorema (Criterio de Cuociente). Sea (a_n) una sucesión de términos positivos y supongamos que $r := \lim a_{n+1}/a_n$ existe. Dependiendo del valor de r se tienen las siguientes conclusiones.

1. Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.

2. Si $r > 1$ o $r = \infty$, entonces $\sum a_k$ diverge.

3. Si $r = 1$ entonces $\sum a_k$ puede converger o divergir, es decir, en este caso el criterio no nos ayuda a determinar la convergencia de la serie.

Teorema (Criterio de la Integral Impropia). Sea $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}^+$ una función decreciente. Se tiene que $\sum_{n\geq1} f(n) < \infty$ equivale a $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$.