MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo
14 de noviembre de 2023

Pauta Auxiliar 12

Integrales impropias

Problema 1. *Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Estudie la convergencia de la siguiente integral*

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\, dx$$

para diversos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución. Caso $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{b-x}\, dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\log(b-x)\,\Big|_a^{b-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log(b-a) - \log\varepsilon \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

con lo que para $\alpha = 1$ la integral impropia diverge.

Caso $\alpha \neq 1$. En este caso se tiene

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\, dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left.\frac{1}{(\alpha-1)(b-x)^{\alpha-1}}\right|_a^{b-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\therefore \int_a^b \frac{1}{b-x}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

□

Problema 2. *a). Muestre que si $\int_{-\infty}^{\infty} f$ existe, entonces $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f$ existe y $\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f$.*

b). Encuentre un ejemplo donde $\int_{-\infty}^{\infty} f$ y $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f$ no tienen el mismo valor.

Solución. a). Asumamos que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ existe. Entonces

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{0} f + \int_0^N f = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{0} f + \lim_{N\to\infty} \int_0^N f = \int_{-\infty}^{0} f + \int_0^{\infty} f = \int_{-\infty}^{\infty} f.$$

$$\therefore \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f = \int_{-\infty}^{\infty} f.$$

Donde el límite de la suma es la suma del límite pues sabemos que ambos factores convergen.

b). De la parte anterior, sabemos que cualquier contraejemplo, debe ser tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ no existe. Sea f una función impar integrable en cada intervalo cerrado, entonces

$$\int_{-N}^{N} f = \int_{-N}^{0} f + \int_{0}^{N} f = -\int_{N}^{0} f(-x) + \int_{0}^{N} f = -\int_{0}^{N} f(x) + \int_{0}^{N} f = 0$$

y se sigue que $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f = 0$ para cualquier función impar integrable en todos los intervalos cerrados. Basta entonces encontrar una función impar continua tal que $\int_{-\infty}^{0} f$ o $\int_{0}^{\infty} f$ diverja. Se concluye que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1}\, dx \neq \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} x^{2n+1}\, dx.$$

□

Problema 3.
Definición (Función Gamma). Definimos la función Gamma mediante la integral impropia $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$.

a). Demuestre que la integral impropia $\Gamma(x)$ está definida para $x > 0$.

b). Demuestre que

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

c). Muestre que $\Gamma(1) = 1$ y concluya que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo número natural n. Con esto podemos definir la función $\bullet!\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ mediante $x \mapsto x! = \Gamma(x+1)$ (acabamos de demostrar que, cuando x es natural, esta definición coincide con la definición de factorial tradicional).

*d). **(Propuesto.)** Calcule $\Gamma(1/2)$.*

Hint: Use una substitución adecuada y el hecho que $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Si quiere (un desafío y) demostrar el hint, puede revisar el problema 41 del capítulo 19 de M. Spivak, Calculus.

Solución. a). Sea $\Gamma_a^b(x) = \int_a^b e^{-t} t^{x-1}\, dt$. Con esto, $\Gamma = \Gamma_0^1 + \Gamma_1^\infty$. Mostraremos que ambos componentes convergen. Sea $x > 0$ Notemos que para $t \in [0,1]$, $0 \leq e^{-t} \leq 1$, con lo que $0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1}$ y se concluye que $\Gamma_0^1(x)$ converge pues $\int_0^1 t^{x-1}\, dt$ converge (Criterio de Comparación).

Para $\Gamma_1^\infty(x)$, necesitamos la siguiente propiedad: la función exponencial crece más rápido que cualquier polinomio. En particular,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t/2}}{t^{x-1}} = +\infty.$$

Con esto, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $t \geq N$, se tiene que $t^{x-1} \leq e^{t/2}$, con esto, en $[N, +\infty)$, $0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq e^{-t/2}$ con lo que, por el Criterio de Comparación, si $\int_N^\infty e^{t/2}\, dt$ converge, entonces $\Gamma_1^\infty(x)$ converge. Mostrar que esta última integral converge es simple pues $\int_1^a e^{-t/2} = 2e^{-1/2} - 2e^{-a/2} \to 2e^{-1/2}$ ciando $a \to \infty$.

Se concluye que $\Gamma(x)$ converge para cada $x > 0$.

b). Se tiene que, si $x > 0$,

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^1 e^{-t}t^x\,dt + \int_1^\infty e^{-t}t^x\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^x\,dt + \lim_{N\to\infty}\int_1^N e^{-t}t^x\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} -e^{-t}t^x\,|_{t=\varepsilon}^1 + x\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt + \lim_{N\to\infty} -e^{-t}t^x\,|_{t=1}^N + x\int_1^N e^{-t}t^{x-1}\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} e^{-\varepsilon}\varepsilon^x - e^{-1} + x\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt + \lim_{N\to\infty} e^{-1} - e^{-N}N^x - e^{-t}t^x\,|_{t=1}^N + x\int_1^N e^{-t}t^{x-1}\,dt \\
&= -e^{-1} + x\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt + e^{-1} + x\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \\
&= x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \\
&= x\Gamma(x)
\end{aligned}
$$

c).

$$
\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{1-1}\,dt \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-t}\,dt \\
&= \lim_{N\to\infty} -e^{-t}\,|_0^N \\
&= \lim_{N\to\infty} e^{-0} - e^{-N} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Con esto, tenemos que $\Gamma(1) = 1 = (1-1)!$. Si asumimos que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para algún n, entonces $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n! = ([n+1]-1)!$ y se concluye que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n) = (n-1)!.$$

$\square$