MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo
14 de noviembre de 2023

AUXILIAR 12

Integrales impropias

Problema 1. *Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Estudie la convergencia de la siguiente integral*

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\, dx$$

para diversos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 2. *a). Muestre que si $\int_{-\infty}^{\infty} f$ existe, entonces $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f$ existe y $\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f$.*

b). Encuentre un ejemplo donde $\int_{-\infty}^{\infty} f$ y $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f$ no tienen el mismo valor.

Problema 3.
Definición (Función Gamma). Definimos la función Gamma mediante la integral impropia $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$.

a). Demuestre que la integral impropia $\Gamma(x)$ está definida para $x > 0$.

b). Demuestre que

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

c). Muestre que $\Gamma(1) = 1$ y concluya que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo número natural n.

*d). **(Propuesto.)** Calcule $\Gamma(1/2)$.*

Hint: Use una substitución adecuada y el hecho que $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Si quiere (un desafío y) demostrar el hint, puede revisar el problema 41 del capítulo 19 de M. Spivak, Calculus.

Apéndice.

Definición (Integral Impropia de Primera Especie). Sea $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ diremos que f es integrable en $[a,\infty)$ si se cumple que:

(I) $\forall x \in (a,\infty)$, f es integrable en $[a,x]$ y además

(II) Existe el límite definido por $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$.

Denotamos este límite por $\int_a^\infty f$.
Se define $\int_{-\infty}^b f$ de manera similar.
Se define $\int_{-\infty}^\infty f$ mediante $\int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f$ si ambas integrales convergen.
Definición (Integral Impropia de Segunda especie). Sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ una función no acotada, diremos que f es integrable en $[a,b)$ si

(I) $\forall x \in (a,b)$, f es integrable en $[a,x]$,

(II) El límite $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ existe.

Las notaciones y versiones alternativas son similares al caso de primera especie.
Definición (Integral Impropia de Tercera Especie). Son las funciones que se obtienen combinando integrales impropias de primera y segunda especie. Este tipo de integrales se dirá convergente si cada una de sus componentes es una integral convergente.

Teorema (Criterio de Comparación). Sean f y g funciones continuas en $[a,\infty)$ tales que

$$\exists b \geq a, \forall x \geq b,\ 0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Entonces, si $\int_a^\infty g$ converge, entonces $\int_a^\infty f$ converge.
Para integrales impropias de la segunda especie, el teorema es análogo.

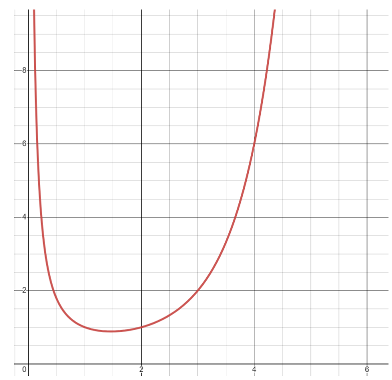

Figura 1: Gráfico de la función Γ en el dominio $(0,6]$.