MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo
24 de octubre de 2023

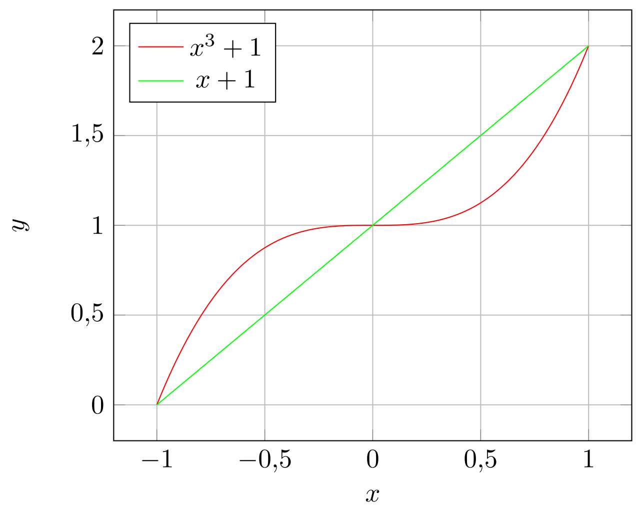
Pauta Auxiliar 10

Volúmenes y longitudes

Problema 1. *Calcule el área encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x + 1$.*

Solución. Encontremos los puntos de intersección: $f(x) = g(x) \iff x^3 + 1 = x + 1 \iff x(x^2 - 1) = 0 \iff x(x+1)(x-1) = 0 \iff x \in \{-1, 0, 1\}$. Con lo que el área por calcular se encuentra comprendida en la franja $[-1, 1] \times \mathbb{R}$. Ahora, encontremos los signos de $f - g$: se tiene que para $f(1/2) - g(1/2) = 1/8 - 1/2 = -3/8$ con lo que $f(x) - g(x) < 0$ para $x \in (0, 1)$, además, $f(-1/2) - g(-1/2) = -1/8 + 1/2 = 3/8$ con lo que $f(x) - g(x) > 0$ para $x \in (-1, 0)$ (para concluir el signo, se usó el TVI para concluir que no pueden haber cambios de signo en estos intervalos). Con esto podemos calcular:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} |f - g| \\
&= \int_{-1}^{0} f - g + \int_{0}^{1} g - f \\
&= \int_{-1}^{0} x^3 - x \, dx + \int_{0}^{1} x - x^3 \, dx \\
&= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{x=0}^{1} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$



□

Problema 2. *a). Encuentre el volumen del sólido obtenido al rotar la región comprendida por las curvas $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ alrededor del eje horizontal.*

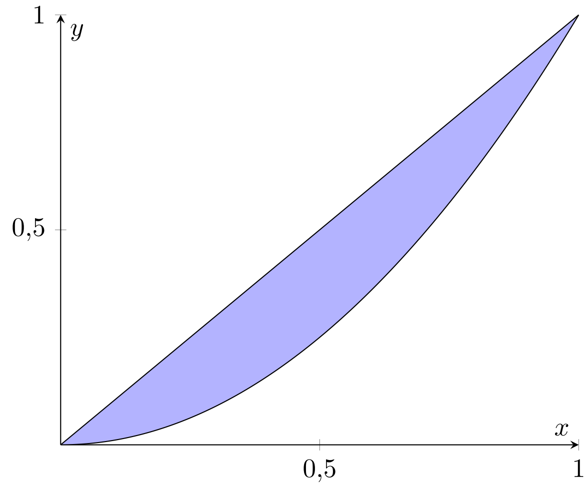
b). Encuentre el volumen del mismo sólido al rotarlo alrededor del eje vertical.

Solución. *a).* Encontramos primero los puntos de intersección de las dos curvas: $f(x) = g(x) \iff x - x^2 = 0 \iff x(1 - x) = 0 \iff x \in \{0, 1\}$. Con lo que el área por rotar está contenida en la franja $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Además, en este intervalo $x^2 \leq x$ con lo que $0 \leq g(x) \leq f(x)$. Con esto,

$$V = \int_0^1 \pi f^2(x) \, dx - \int_0^1 \pi g^2(x) \, dx = \pi \int_0^1 x^2 - x^4 \, dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{x=0}^{1} = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}.$$

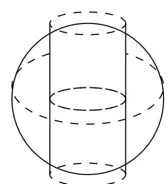
b). En este caso, ya sabemos las intersecciones de las curvas con lo que podemos calcular

$$V = 2\pi \int_0^1 x f(x) \, dx - 2\pi \int_0^1 x g(x) \, dx = 2\pi \int_0^1 x^2 - x^3 \, dx = 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{x=0}^{1} = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$



$\square$

Problema 3. *Un agujero cilíndrico de radio a es perforado a través del centro de una esfera de radio $2a$. Encuentre el volumen del sólido resultante.*



Solución. El lugar geométrico de una esfera de radio $2a$ centrada en el origen queda descrito mediante

$$E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\, \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq 2a\right\}$$

y un cilindro de radio a con eje de simetría OZ queda descrito mediante

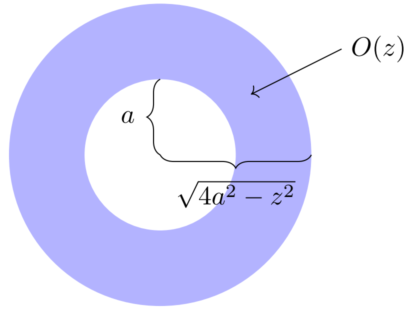
$$C := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\, \sqrt{x^2+y^2} \leq a\right\}$$

Con lo que se tiene que

$$E \setminus C = \underbrace{\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\, x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2 \ \wedge\ \neg(x^2+y^2 \leq a^2)\right\}}_{:=X}$$

y queremos encontrar $V(X)$. Para esto, calculamos el área $A(z)$ de la sección transversal paralela al plano XY a una altura z (que denotaremos $O(z)$): Sea $z \in \mathbb{R}$, con esto

$$\begin{aligned} O(z) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2 \ \wedge\ \neg(x^2+y^2 \leq a^2)\right\} \times \{z\} \\ &= \left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, x^2+y^2 \leq 4a^2 - z^2\right\} \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, x^2+y^2 \leq a^2\right\}\right) \times \{z\} \end{aligned}$$



La parte exterior en la figura corresponde a los límites impuestos por la esfera mientras que la parte interior corresponde a los límites impuestos por el cilindro.

Con lo que, si $4a^2 - z^2 < a^2$, entonces $O(z) = \emptyset$ y $A(z) = 0$ y si $4a^2 - z^2 \geq a^2$, $O(z)$ es un circulo de radio $\sqrt{4a^2 - z^2}$ al cual se le remueve un círculo concéntrico de radio a. De esto, se sigue que $A(z) = \pi(4a^2 - z^2) - \pi a^2 = \pi(3a^2 - z^2)$ con $z \in [-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a]$. Y se sigue que

$$\begin{aligned}
V(X) &= \int_{-\sqrt{3}a}^{\sqrt{3}a} A(z)\,dz \\
&= \pi \int_{-\sqrt{3}a}^{\sqrt{3}a} 3a^2 - z^2\,dz \\
&= \pi 3a^2 \int_{-\sqrt{3}a}^{\sqrt{3}a} dz - \pi \int_{-\sqrt{3}a}^{\sqrt{3}a} z^2\,dz \\
&= \pi \left(6a^3\sqrt{3} - \left.\frac{z^3}{3}\right|_{z=-\sqrt{3}a}^{\sqrt{3}a} \right) \\
&= \pi \left(6a^3\sqrt{3} - 2\frac{\sqrt{3}^3 a^3}{3} \right) \\
&= \pi a^3\sqrt{3} \left(6 - 2\frac{3}{3} \right) \\
&= 4\sqrt{3}a^3\pi
\end{aligned}$$

□

Problema 4. *a). Sea* $a \in \mathbb{R}$ *y* $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *continua en* a*. Muestre que* $\inf_{y\in[a,x]} f(y), \sup_{y\in[a,x]} f(y) \to f(a)$ *cuando* $x \to a^+$.

b). Sea $a \in \mathbb{R}$*, sea* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuamente diferenciable y sea* $\mathscr{L}\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *la longitud de la curva dada por el grafo de* f *en* $[a,x]$*. Sea* $d\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *la longitud de la recta que une los puntos* $(a, f(a))$ *y* $(x, f(x))$*. Muestre que*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\mathscr{L}(x)}{d(x)} = 1.$$

Solución. a). Mostraremos solo para sup, el otro queda propuesto. Sea $\varepsilon > 0$ y $x_n \to a^+$. Sea para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in [a, x_n]$ tal que $f(y_n) - \varepsilon/2 \leq \sup_{y\in[a,x_n]} f(y) - \varepsilon/2 < f(y_n)$. Con esto,

$$0 \leq \sup_{y\in[a,x_n]} f(y) - f(y_n) < \varepsilon/2$$

y, en particular,

$$|\sup_{y\in[a,x_n]} f(y) - f(y_n)| < \varepsilon/2 \tag{1}$$

sea, además, $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $|f(y_n) - f(a)| < \varepsilon/2$ (eso es posible pues, como $a \leq y_n \leq x_n$, entonces $y_n \to a^+$ y, además, f es continua en a). Sumando esta última expresión con (1) (para $n > N$), se concluye que

$$|\sup_{y\in[a,x_n]} f(y) - f(y_n)| + |f(y_n) - f(a)| < \varepsilon$$

y utilizando la desigualdad triangular se concluye que

$$|\sup_{y\in[a,x_n]} f(y) - f(a)| < \varepsilon$$

es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \left| \sup_{y\in[a,x_n]} f(y) - f(a) \right| < \varepsilon.$$

b).

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathscr{L}(x)}{d(x)} &= \frac{\int_a^x \sqrt{1+(f')^2}}{\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-f(a))^2}} \\
&= \frac{\int_a^x \sqrt{1+(f')^2}}{(x-a)\sqrt{1+\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)^2}} \\
&= \frac{\int_a^x \sqrt{1+(f')^2}}{(x-a)\sqrt{1+(f'(\xi_1))^2}}, \qquad (\exists_1 \xi \in [a,x]) \\
&= \frac{\sqrt{1+(f'(\xi_2))^2}(x-a)}{(x-a)\sqrt{1+(f'(\xi_1))^2}}, \qquad (\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,x]) \\
&= \frac{\sqrt{1+(f'(\xi_2))^2}}{\sqrt{1+(f'(\xi_1))^2}}, \qquad (\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,x]) \\
&= \frac{\sqrt{1+(f'(\xi_2))^2}}{\sqrt{1+(f'(\xi_1))^2}}, \qquad (\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,x])
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$\forall x \in [a,\infty), \exists {\xi_1}_x, {\xi_2}_x \in [a,x],\ \frac{\mathscr{L}(x)}{d(x)} = \frac{\sqrt{1+(f'({\xi_2}_x))^2}}{\sqrt{1+(f'({\xi_1}_x))^2}}$$

Sea, para cada $x \in [a,\infty)$, $a_x \in [a,x]$, mostraremos que $\lim_{x\to a^+} \sqrt{1+(f'(a_x))^2} = \sqrt{1+(f'(a))^2}$. En efecto, si $x \in [a,\infty)$,

$$\inf_{y\in[a,x]} \sqrt{1+(f'(y))^2} \leq \sqrt{1+(f'(a_x))^2} \leq \sup_{y\in[a,x]} \sqrt{1+(f'(y))^2}$$

con lo que del teorema del sándwich y de la parte anterior se concluye que

$$\lim_{x\to a^+} \sqrt{1+(f'(a_x))^2} = \sqrt{1+(f'(a))^2}.$$

Con esto

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\mathscr{L}(x)}{d(x)} = \frac{\lim_{x\to a^+} \sqrt{1+(f'({\xi_2}_x))^2}}{\lim_{x\to a^+} \sqrt{1+(f'({\xi_1}_x))^2}} = \frac{\sqrt{1+(f'(a))^2}}{\sqrt{1+(f'(a))^2}} = 1.$$

□