**MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.**
**Profesor:** Cristián Reyes.
**Auxiliar:** Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo
**24 de octubre de 2023**

# Auxiliar 10

*Volúmenes y longitudes*

**Problema 1.** *Calcule el área encerrada por los gráficos de las funciones* $f(x) = x^3 + 1$ *y* $g(x) = x + 1$.

**Problema 2.** *a). Encuentre el volumen del sólido obtenido al rotar la región comprendida por las curvas* $f(x) = x$ *y* $g(x) = x^2$ *alrededor del eje horizontal.*

*b). Encuentre el volumen del mismo sólido al rotarlo alrededor del eje vertical.*

**Problema 3.** *Un agujero cilíndrico de radio* $a$ *es perforado a través del centro de una esfera de radio* $2a$. *Encuentre el volumen del sólido resultante.*

**Problema 4.** *a). Sea* $a \in \mathbb{R}$ *y* $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *continua en* $a$. *Muestre que* $\inf_{y\in[a,x]} f(y), \sup_{y\in[a,x]} f(y) \to f(a)$ *cuando* $x \to a^+$.

*b). Sea* $a \in \mathbb{R}$, *sea* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuamente diferenciable y sea* $\mathscr{L}\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *la longitud de la curva dada por el grafo de* $f$ *en* $[a, x]$. *Sea* $d\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *la longitud de la recta que une los puntos* $(a, f(a))$ *y* $(x, f(x))$. *Muestre que*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\mathscr{L}(x)}{d(x)} = 1.$$

## Resumen.

1). **Teorema** (Valor medio para integrales). Si $f$ es continua en $[a, b]$, entonces $\exists \xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi)) = \langle f(\xi)\rangle$, es decir:

$$\int_a^b f = f(\xi)(b - a).$$

2). El área entre una función integrable $f$ y el eje $OX$ entre $a < b$ se define como

$$\int_a^b |f|.$$

3). Si se tiene un sólido cuyo corte transversal a lo largo de un eje tiene área $A(x)$, la cual es integrable, entonces el volumen de el sólido será

$$\int_a^b A(x)\,dx$$

4). El solido generado por rotaciones del conjunto $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \ \wedge\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ en torno al eje $OX$ es

$$\pi \int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

5). Rotación de la misma región en torno al eje $OY$ (bajo el supuesto $0 < a < b$): el volumen será

$$2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

6). Si $f$ es continuamente diferenciable, entonces la longitud de la curva dada por su grafo con dominio $[a, b]$ queda descrito mediante

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}$$