



FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Cristián Reyes

Auxiliares: Nicolás Cornejo y Sebastián Pincheira

Auxiliar 9

Teorema Fundamental del Cálculo

P1 Calcule el siguiente límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n i 2^{\frac{i}{n}} \right)$

P2 Pruebe que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e impar, entonces $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. ¿Qué ocurre en el caso par?

P3 Sean $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables y f una función continua. Se define

$$G(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt$$

a) Muestre que $G'(x) = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$

b) Demuestre que $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$ no depende de x y calcule su valor $\forall x > 0$

c) Demuestre que la función H definida por $H(x) = \int_0^{\sin(x)} \arcsin(t) dt$ tiene un máximo local en $\frac{\pi}{2}$ y un mínimo local en 0, calcúlelos.

P4 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y periódica de periodo p . Demuestre que $\int_a^{a+p} f = \int_0^p f, \forall a \in \mathbb{R}$

P5 [Propuesto] Sea $k \in \mathbb{N}$. Sea $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_0^1 u^k \sin(ux) du$$

a) Pruebe que F es derivable en $(0, \infty)$ y calcule F'

b) Calcule

$$F'(0) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h) - F(0)}{h}$$

c) Muestre que F es de clase $\mathcal{C}^1([0, \infty))$, es decir, verifique que F' es continua.

Prop. *Propiedades de la integral*

$$\begin{aligned} \blacksquare \int_a^b c &= c(b-a) & \blacksquare \left| \int_a^b f \right| &\leq \int_a^b |f| \\ \blacksquare \int_a^b f &\leq \int_a^b g \text{ si } f(x) \leq g(x) \text{ en todo } [a, b] & \blacksquare \int_a^b (f + \alpha g) &= \int_a^b f + \alpha \int_a^b g \end{aligned}$$

Def. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y $a > b$ se define $\int_a^b f := - \int_b^a f$

Prop. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces la función $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua.

Teo (TFC1). Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces G es derivable en $\text{int}(I)$ y $\forall x \in \text{int}(I)$:

$$G'(x) = f(x)$$

Corolario 1. Si la función F , continua en I es una primitiva cualquiera de f en I , entonces:

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Teo (TFC2). Sea f integrable en $[a, b]$, si existe una función F continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que: $F' = f$ en (a, b) , entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Prop (IPP). Sean f y g dos funciones continuas en I intervalo y diferenciables en $\text{int}(I)$. Sean $a, b \in \text{int}(I)$. Si f' y g' entonces:

$$\int_a^b fg' = fg \Big|_a^b - \int_a^b gf'$$

Prop (CV). Sea g continua en I y derivable en $\text{int}(I)$, con g' continua. Sean $a, b \in \text{int}(I)$ con $a < b$. Sea f continua en $g([a, b])$, entonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Teo (TVM integral). Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f = (b-a)f(\xi)$$