MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo
3 de octubre de 2023

Pauta Auxiliar 7

Integral de Riemann

Problema 1. *Muestre que* $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *no es integrable en* $[0,1]$.

Solución. Notemos que

$$I_+(f) = \text{ínf}\left\{\int_0^1 e \colon e \in \mathcal{E}_+\right\} \geq \text{ínf}\left\{\int_{1/2}^1 e \colon e \in \mathcal{E}_+\right\} \geq \int_{1/2}^1 1/2\, dx \geq 1/4$$

donde se usó que $\forall e \in \mathcal{E}_+,\ e \geq 0$ en cada intervalo en el que es constante: pues en cada intervalo, f tiene valores no-negativos (con lo que e debe ser no negativo en cada intervalo en el que es contante, pues debe mayorar a f). Además,

$$I_-(f) = \sup\left\{\int_0^1 e \colon e \in \mathcal{E}_-\right\} \leq \text{ínf}\left\{\int_{1/2}^1 e \colon e \in \mathcal{E}_+\right\} \leq \int_{1/2}^1 -1/2\, dx \leq -1/4$$

donde se usó que $\forall e \in \mathcal{E}_-,\ e \leq 0$ en cada intervalo en el que es constante: pues en cada intervalo, f tiene valores no-positivos (con lo que e debe ser no positivo en cada intervalo en el que es contante, pues debe minorar a f).

$$\therefore I_+(f) - I_-(f) \geq 1/2 \text{ y } f \text{ no es integrable.}$$

□

Problema 2. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y sea, para cada* $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, *sea* $x_i = \frac{(i+1)(i+2)/2-i-1}{n(n+1)/2}$ *con lo que* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *una partición de* $[0,1]$. *Sea* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *una función escalonada tal que* $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \forall x \in (x_{i-1}, x_i),\ f(x) = n(n+1)(1/4)^i$. *Demuestre que*

$$\int_0^1 f = \frac{8}{9}(1 - (n+1)(1/4)^n + n(1/4)^{n+1}).$$

Solución. Sea f_i el valor de f en (x_{i-1}, x_i). Por definición,

$$\int_0^1 f = \sum_{i=1}^n f_i(x_i - x_{i-1})$$

con lo que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f &= \sum_{i=0}^{n} n(n+1)(1/4)^i \left(\frac{(i+1)(i+2)/2 - i - 1}{n(n+1)/2} - \frac{i(i+1)/2 - i}{n(n+1)/2}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n} n(n+1)(1/4)^i \left(\frac{(i+1)(i+2)/2 - i - 1 - i(i+1)/2 + i}{n(n+1)/2}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n} (1/4)^i \left(\frac{(i+1)(i+2)/2 - 2/2 - i(i+1)/2}{1/2}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n} (1/4)^i \left((i+1)(i+2) - 2 - i(i+1)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n} (1/4)^i \left[(i+1)[i+2-i] - 2\right]\\
&= \sum_{i=0}^{n} (1/4)^i \left[2i+2-2\right]\\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{2i}{4^i}
\end{aligned}
$$

Proseguiremos de manera inductiva: Para $n = 0$, se tiene que $\sum_{i=0}^{0} 2i/4^i = 0 = \frac{8}{9}(1 - (0+1)(1/4)^0 + 0(1/4)^{0+1})$ con lo que se tiene el caso base. Ahora asumimos $\sum_{i=0}^{n} 2i/4^i = \frac{8}{9}(1 - (n+1)(1/4)^n + n(1/4)^{n+1})$ y demostramos el paso inductivo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2i/4^i &= \sum_{i=0}^{n} 2i/4^i + \frac{2(n+1)}{4^{n+1}}\\
&= \frac{8}{9}(1 - (n+1)(1/4)^n + n(1/4)^{n+1}) + \frac{8}{9}\frac{9}{8}\frac{2(n+1)}{4^{n+1}}\\
&= \frac{8}{9}\left(1 - (n+1)(1/4)^n + n(1/4)^{n+1} + \frac{9}{4}(n+1)(1/4)^{n+1}\right)\\
&= \frac{8}{9}\left(1 - (4n+4)(1/4)^{n+1} + n(1/4)^{n+1} + \frac{9}{4}(n+1)(1/4)^{n+1}\right)\\
&= \frac{8}{9}\left(1 - ((n+1)+1)(1/4)^{n+1} - (3n+2)(1/4)^{n+1} + n(1/4)^{n+1} + \frac{9}{4}(n+1)(1/4)^{n+1}\right)\\
&= \frac{8}{9}\left(1 - ((n+1)+1)(1/4)^{n+1} + (-3n-2+n+\frac{9}{4}(n+1))(1/4)^{n+1}\right)\\
&= \frac{8}{9}\left(1 - ((n+1)+1)(1/4)^{n+1} + 4(-2n-2+\frac{9}{4}(n+1))(1/4)^{(n+1)+1}\right)\\
&= \frac{8}{9}\left(1 - ((n+1)+1)(1/4)^{n+1} + (-8n-8+9n+9)(1/4)^{(n+1)+1}\right)\\
&= \frac{8}{9}\left(1 - ((n+1)+1)(1/4)^{n+1} + (n+1)(1/4)^{(n+1)+1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \int_0^1 f = \frac{8}{9}(1 - (n+1)(1/4)^n + n(1/4)^{n+1}).
$$

□

Problema 3. *a). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Muestre que f es integrable si y solo si lo es en cualquier intervalo cerrado contenido en $[a,b]$.*

b). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Muestre que

$$(b-a) \inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \int_a^b f \le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

c). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Muestre que si f es continua, entonces

$$\forall x \in (a,b),\ f(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(y)\,dy.$$

Solución. a). *Notación:* Para cualquier función $f\colon X \to Y$, si $A \subseteq X$, definimos $f\mid_A\colon A \to Y$ mediante $x \mapsto f(x)$ (es simplemente reducir el dominio de f a A).

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y $I = [c,d] \subseteq [a,b]$. Mostraremos que $f\mid_I$ es integrable. En efecto: sea $\varepsilon > 0$ y f_- y f_+ funciones escalonadas con partición $P = \{x_i \mid i \in \{0,1,\dots,n\}\}$ que minoran y mayoran a f en $[a,b]$ respectivamente y que cumplen

$$\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- < \varepsilon.$$

Es claro que $f_+\mid_I$ y $f_-\mid_I$ son funciones escalonadas con partición $P' = \{c, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, d\}$ donde $x_i = \min P\cap I$ y $x_j = \max P \cap I$, si $P\cap I \neq \emptyset$ y $P = \{c,d\}$ si $P \cap I = \emptyset$. Además, es claro que $f_-\mid_I$ y $f_+\mid_I$ minoran y mayoran a $f\mid_I$ respectivamente. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_c^d f_+\mid_I - \int_c^d f_-\mid_I &= \int_c^d f_+\mid_I(x) - f_-\mid_I(x)\,dx \\
&= \int_c^d f_+(x) - f_-(x)\,dx \\
&\le \underbrace{\int_a^c f_+ - f_-}_{\ge 0} + \int_c^d f_+ - f_- + \underbrace{\int_d^b f_+ - f_-}_{\ge 0} \\
&= \int_a^b f_+ - f_- \\
&= \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

con lo que f es integrable en cualquier intervalo cerrado contenido en $[a,b]$.

Asumamos ahora que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en cualquier intervalo cerrado contenido en $[a,b]$, *a fortiori*, es integrable en $[a,b]$ y se concluye.

b). Mostraremos solo la primera desigualdad, la segunda es similar y queda propuesta al lector. Se tiene que la función constante $x \mapsto \inf_{y\in[a,b]} f(y)$ es una función escalonada con partición $P = \{a,b\}$. Además, minora a f. De esto se sigue que

$$\int_a^b \inf_{y\in[a,b]} f(y)\,dx \le \int_a^b f.$$

Basta notar que

$$\int_a^b \inf_{y\in[a,b]} f(y)\,dx = (a-b) \inf_{y\in[a,b]} f(y)$$

para concluir.

c). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e integrable y $x \in (a,b)$. Con esto, del problema anterior, se sigue que f es integrable en $[x-h, x+h]$ cuando $h > 0$ es suficientemente pequeño como para que este intervalo esté contenido en $[a,b]$. Con esto, el termino dentro del límite está bien definido a partir de un cierto h y podemos comenzar con el cálculo del límite:

De la parte b), se tiene que

$$2h \inf_{y\in[x-h,x+h]} f(y) \le \int_{x-h}^{x+h} f \le 2h \sup_{y\in[x-h,x+h]} f(y).$$

con lo que, dividiendo por $2h$,

$$m_h \le \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f \le M_h. \tag{1}$$

donde $m_h = \text{ínf}_{y\in[x-h,x+h]} f(y)$ y $M_h = \sup_{y\in[x-h,x+h]} f(y)$ con lo que basta mostrar que $M_h, m_h \to f(x)$ para concluir. Mostraremos este resultado para M_h, el resultado para m_h es similar y queda propuesto al lector.

Sea $h_n \to 0$ tal que $h_n > 0$. Queremos mostrar que $\text{lím}\, M_{h_n} = f(x)$. Como f es continua, sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [x-h_n, x+h_n]$ tal que $f(x_n) = M_{h_n}$. Se sigue que $x_n \to x$ y, como f es continua, $f(x_n) \to f(x)$. Es decir

$$\text{lím}\, M_{h_n} = \text{lím}\, f(x_n) = f(x).$$

Aplicando límite en (1), se concluye que

$$f(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f.$$

□

Problema 4. *a). **[Propuesto]:** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Muestre que si $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ difiere en un único punto de f, entonces $I_+(f) = I_+(g)$ y $I_-(f) = I_-(g)$. En particular, g es integrable si f lo es.*

b). Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ integrable. Muestre que si $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ difiere de f en una cantidad finita de puntos, entonces $I_+(f) = I_+(g)$ y $I_-(f) = I_-(g)$. En particular, g es integrable si f lo es.

c). Considere la función de Thomae definida mediante

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \text{ con } mcd(p,q) = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Muestre que f es integrable y calcule su integral.

Solución. a). **[Propuesto]**

b). Asumamos que difieren en los puntos $(x_i)_{i=1}^m$. Sea

$$f_1 = \begin{cases} f(x), & x \ne x_1 \\ g(x), & x = x_1 \end{cases}$$

y sea, para $n \in \{2,3,\dots,m\}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} f_{n-1}(x), & x \ne x_n \\ g(x), & x = x_n \end{cases}$$

con esto f_n y f_{n+1} difieren en un único punto, con lo que, por el propuesto, para cada $n \in \mathbb{N}$, $I_+(f_n) = I_+(f)$ y $I_-(f_n) = I_-(f)$. Como $g = f_m$, se concluye.

c). Sea $\varepsilon > 0$, y sea $\epsilon = \text{mín}(\varepsilon, 1)$ notemos que $|f^{-1}([\epsilon,+\infty))| < |\mathbb{N}|$: en efecto, sea $\overline{q} = \text{máx}\{q \in \mathbb{N} \mid q \le \frac{1}{\epsilon}\}$, es decir, $1/\overline{q}$ es el menor elemento de la forma $1/q$ con $q \in \mathbb{N}$ que es mayor que ϵ (y por lo tanto, la menor imagen no-nula de f mayor que ϵ). Con esto, los únicos elementos en $f^{-1}([\epsilon,+\infty))$ serán de la forma $\frac{p}{q}$ con $q \le \overline{q}$ y $p \in \{1,\dots,q\}$ (pues el resto de los elementos de la imagen serán, o nulos, o tendrán un denominador mayor que $\overline{q}$ y serán menores que ϵ), es decir,

$$f^{-1}([\epsilon,+\infty)) \subseteq \{p/q \in [0,1] \mid q \in \{1,2,\dots,\overline{q}\} \wedge p \in \{1,2,\dots,q\} \subseteq \{p/q \in [0,1] \mid (q,p) \in \{1,2,\dots,\overline{q}\} \times \{1,2,\dots,\overline{q}\}\}$$

y se sigue que $|f^{-1}([\epsilon,+\infty))| \le \overline{q}^2$ y $f^{-1}([\epsilon,+\infty))$ es finito.

Sea ahora

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin f^{-1}([\epsilon, +\infty)) \\ 0, & x \in f^{-1}([\epsilon, +\infty)) \end{cases}$$

con lo que $f_\epsilon < \epsilon$ y, como $x \mapsto \epsilon$ es una función escalonada que mayora a f_ϵ, por definición de integral superior,

$$I_+(f_\epsilon) \leq \int_0^1 \epsilon \, dx = \epsilon \leq \varepsilon$$

y, como f_ϵ difiere en una cantidad finita de puntos de f, entonces $I_+(f) = I_+(f_\epsilon)$ y

$$I_+(f) \leq \varepsilon.$$

Como esto es verdad para todo $\varepsilon > 0$, se sigue que $I_+ \leq 0$. Además, como la función escalonada constante $x \mapsto 0$ minora a f, se sigue de la definición de integral inferior que $\int_0^1 0 \, dx \leq I_-(f)$ con lo que $0 \leq I_-(f)$. Con esto,

$$0 \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq 0$$

es decir, $I_-(f) = I_+(f) = 0$ y se concluye de la definición de integral de Riemann que

$$\int_0^1 f = 0.$$

$\square$