MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo
3 de octubre de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

AUXILIAR 7

Integral de Riemann

Problema 1. *Muestre que* $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *no es integrable en* $[0,1]$.

Problema 2. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y sea, para cada* $i \in \{0,1,\dots,n\}$, $x_i = \frac{(i+1)(i+2)/2-i-1}{n(n+1)/2}$ *con lo que* $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ *es una partición de* $[0,1]$. *Sea* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *una función escalonada tal que* $\forall i \in \{0,1,\dots,n-1\}, \forall x \in (x_{i-1}, x_i),\ f(x) = n(n+1)(1/4)^i$. *Demuestre que*

$$\int_0^1 f = \frac{8}{9}(1-(n+1)(1/4)^n + n(1/4)^{n+1}).$$

Problema 3. *a). Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función. Muestre que* f *es integrable si y solo si lo es en cualquier intervalo cerrado contenido en* $[a,b]$.

b). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrable. Muestre que*

$$(b-a)\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \int_a^b f \le (b-a)\sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

c). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrable. Muestre que si* f *es continua, entonces*

$$\forall x \in (a,b),\ f(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(y)\,dy.$$

Problema 4. *a).* ***[Propuesto]:*** *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. *Muestre que si* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *difiere en un único punto de* f, *entonces* $I_+(f) = I_+(g)$ *y* $I_-(f) = I_-(g)$. *En particular,* g *es integrable si* f *lo es.*

b). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrable. Muestre que si* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *difiere de* f *en una cantidad finita de puntos, entonces* $I_+(f) = I_+(g)$ *y* $I_-(f) = I_-(g)$. *En particular,* g *es integrable si* f *lo es.*

c). Considere la función de Thomae definida mediante

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \text{ con } mcd(p,q) = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Muestre que f *es integrable y calcule su integral.*

Resumen.

1). **Definición** (Partición). Una **partición** de un intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto finito de puntos $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ talques que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

2). **Definición** (Función escalonada). Diremos que una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es **escalonada**, si existe una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tal que f es constante en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i), $\forall i = 1, \ldots, n$.

3). **Definición** (Integral de Riemann escalonada). Para cada función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ **escalonada**, se define su **integral de Riemann** como

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - x_{i-1}),$$

donde $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ designa cualquier partición asociada a f y f_i denota el valor constante de f en el correspondiente intervalo abierto (x_{i-1}, x_i).

4). **Teorema** (Linealidad). Si f, g son dos funciones escalonadas en el mismo intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la función $\alpha f + \beta g$ es una función escalonada en $[a,b]$ y se tiene

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

5). **Teorema** (Aditividad horizontal). Si f es una función escalonada en el intervalo $[a,b]$ (donde $a < b$) y si $c \in (a,b)$ es arbitrario. Entonces, f es una función escalonada en ambos intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ y se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

6). **Teorema** (Monotonía). La integral de una función escalonada positiva en el intervalo $[a,b]$ es positiva. En consecuencia, si f, g son funciones escalonadas en el intervalo $[a,b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, se tiene que

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

7). **Teorema**. Se tiene que $\mathcal{E}_-(f) := \{f_- \text{ escalonada} \mid f_- \leq f\} \neq \emptyset$ y $\mathcal{E}_+(f) := \{f_+ \text{ escalonada} \mid f_+ \geq f\} \neq \emptyset$. Además $I_-(f) := \sup_{e \in \mathcal{E}_-} \int_a^b e \in \mathbb{R}$ y $I_+(f) := \text{ínf}_{e \in \mathcal{E}_+} \int_a^b e \in \mathbb{R}$ donde se tiene la desigualad $I_-(f) \leq I_+(f)$.

8). **Definición** (Integral de Riemann). Con las notaciones del teorema anterior, se dice que una función f definida y acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$ es **Riemann integrable** en $[a,b]$ si se cumple la

$$I_-(f) = I_+(f)$$

Dicho número común se llama la integral de f en el intervalo $[a,b]$ y se le denota

$$\int_a^b f \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

9). **Teorema** (Condición de Riemann). Una función f definida y acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$ es Riemann integrable en $[a,b]$ si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists f_- \in \mathcal{E}_-, \exists f_+ \in \mathcal{E}_+, \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leq \varepsilon.$$