MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Cristián Reyes
Auxiliares: Nicolás Cornejo y Sebastián Pincheira

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 6

Primitivas

P1 Calcule las siguientes primitivas:

1. $\displaystyle\int \sin^2\left(\frac{x}{4}\right)\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$
3. $\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x+4}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx$
5. $\displaystyle\int \arccos(x)\,dx$
6. $\displaystyle\int e^x\sin(x)\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{7x^2-3x+21}{x^3-x^2+4x-4}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^2+1}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(9+x^2)^2}$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$
11. $\displaystyle\int \csc(x)\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)}$

P2 Determine todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ que satisfacen $f(x)f'(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$

P3 Considere la siguiente familia de primitivas

$$I_n = \int \sec^n(x)\,dx$$

Demuestre que se satisface la siguiente regla de recurrencia

$$I_{n+1} = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}(x)\tan(x) + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}, \quad \forall n\geq 2$$

P4 **[Propuesto]** Calcule las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int \sin^4(x)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{\sinh(x)\cosh(x)}{\sqrt{1+\cosh(x)}}dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\,dx$

P5 **[Propuesto]** Deduzca una recurrencia para las siguientes familias de primitivas:

a) $\displaystyle I_n = \int x^n \operatorname{sen}(x)\,dx$ *b)* $\displaystyle J_n = \int \tan^n(x)\,dx$

P6 **[Propuesto]** Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones derivables tales que $f'=\alpha f$ y $g'=g$ para cierto $\alpha>0$. Demuestre que:

$$\int f(x)g(x)(1+\alpha)^n\,dx = f(x)g(x)(1+\alpha)^{n-1}+C$$

Def. Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $int(I)$, se llama primitiva de una función f sobre I si

$$\forall x \in int(I), F'(x) = f(x)$$

Se denota por $\int f(x)\, dx$ al conjunto de primitivas de f

Prop. $\displaystyle\int f'(x)\, dx = f(x) + C \ \ con\ C \in \mathbb{R}$

Prop. $\displaystyle\int$ *es un operador lineal, es decir* $\displaystyle\int f \pm g = \int f \pm \int g$ *y también* $\displaystyle\int \lambda f = \lambda \int f, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Teo (Cambio de Variable). *Si* $u = g(x)$, *entonces* $\displaystyle\int f(u)du = \int (f \circ g)(x) g'(x) dx$

Teo (Integración por Partes (IPP)). $\displaystyle\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

Prop (Sustituciones trigonométricas). *Se recomiendan los siguientes cambios de variables*

- *para* $a^2 + x^2$, *usar* $x = atan(v)$ *o* $x = asenh(v)$
- *para* $a^2 - x^2$, *usar* $x = asen(t)$ *o* $x = acos(t)$
- *para* $x^2 - a^2$, *usar* $x = asec(v)$ *o* $x = acosh(v)$

Prop (Fracciones parciales). *Si se tiene la función racional* $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *con* $gr(Q) > gr(P)$, *se aconseja expresar* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *como suma de fracciones, para ello, se factoriza* $Q(x)$ *completamente como*

$$Q(x) = a(x - r_1)^{\alpha_1} \cdots (x - r_s)^{\alpha_s} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_t x + c_t)^{\beta_t}$$

Donde $r_1, ..., r_s$ *son las raíces reales de* Q *con multiplicidades* $\alpha_1, ..., \alpha_s$, *y* $(x^2 + b_i + c_i)$ *son polinomios sin raíces reales. Entonces,* $R(x)$ *es la suma de funciones del siguiente tipo:*

- *Por cada término* $(x - r_i)_i^{\alpha}$, *aparece la suma de* α_i *funciones del tipo*

$$\frac{A_1}{x - r_i} + \frac{A_2}{(x - r_i)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_i}}{(x - r_i)^{\alpha_i}}$$

- *Por cada término* $(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}$, *aparece la suma de* β_i *funciones del tipo*

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + b_i x + c_i} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + b_i x + c_i)^2} + \cdots \frac{B_{\beta_i} x + C_{\beta_i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}}$$

Prop (Integrales trigonométricas racionales). *Sea* $R(cos(x), sen(x))$ *una fracción, donde tanto numerador y denominador solo contiene* $sen(x)$ *y* $cos(x)$. *Si se desea calcular la primitiva de esta función, se aconseja el cambio de variable* $t = tan(x/2)$, *con esto se tiene:*

- $dx = \dfrac{2dt}{1 + t^2}$
- $\sin(x) = \dfrac{2t}{1 + t^2}$
- $\cos(x) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$