MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo
22 de septiembre de 2023

Auxiliar 5

Pre-control 1

Problema 1. *Sea*

$$\begin{aligned} f\colon (0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\log x}{x}. \end{aligned}$$

a). Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. *Calcule los signos de* f *y de* f'. *Bosqueje una idea del gráfico solo con estos datos.*

b). ¿Cual es mas grande, e^{π} *o* π^{e}*?*

c). Demuestre que si $0 < x \leq 1$, *o* $x = e$, *entonces el único número* y *que cumple* $x^y = y^x$ *es* $y = x$; *pero si* $x > 1$, $x \neq e$, *entonces existe exactamente un número* $y \neq x$ *que cumple* $x^y = y^x$; *más aún, si* $x < e$, *entonces* $y > e$ *y si* $x > e$, *entonces* $y < e$.

Problema 2. *a). Calcule* $\sin 1$ *con un error de, a lo más,* 10^{-4}.

b). Muestre que e *es irracional.*
Hint: *Los polinomios de Taylor nos permiten ver como es una función, similar a cuando descomprimimos un archivo* `.zip`.

Problema 3. *a). Sea* $g\colon [0,1] \to [0,1]$ *continua tal que* $g(0) = 0$ *y* $g(1) = 1$. *Muestre que cualquier función continua* $f\colon [0,1] \to [0,1]$ *es tal que su grafo intersecta al grafo de* g.

b). Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ *continua y diferenciable tal que* $1 \notin f'([0,1])$. *Muestre que el grafo de* f *intersecta la diagonal del cuadrado* $[0,1]^2$ *exactamente un un punto.*

Problema 4. *Calcule los siguiente límites.*

a). $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{e^x + x}$

b). $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin(x)}$.

Problema 5. *Sea* $a \in \mathbb{R}$ *y* $g \in C^2(\mathbb{R})$, *es decir,* g *tiene segunda derivada continua. Calcule* $f'(0)$ *si*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

y $g(0) = g'(0) = 0$ *y* $g''(0) = a$.

Resumen.

Teorema (Criterio de primero orden). Si $\overline{x} \in (a,b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(x) = 0$.

Teorema (TVM). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Teorema (L'Hopital). Sean $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a,b), tales que $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L$ con $L \in \{0, \infty\}$, y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = \lim_{x\to c} f'(x)/g'(x)$ siempre que este último límite exista.

Teorema (Monotonía). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) para $x \in (a,b)$, entonces f es creciente (resp. decreciente) en $[a,b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.

Teorema (Taylor). Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a,b). Sea T_f^k el polinomio de Taylor de orden k en $\overline{x} \in (a,b)$. Entonces, para todo $x > \overline{x}$ (resp. $x < \overline{x}$) existe $\xi \in (\overline{x}, x)$ (resp. $\xi \in (x, \overline{x})$) tal que

$$f(x) = T_f^k(x - \overline{x}) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - \overline{x})^{k+1}.$$

Teorema (TVI). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $(f(a), f(b)) \subseteq f((a,b))$.