MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo
22 de septiembre de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Pauta Auxiliar 5

Pre-control 1

Problema 1. *Sea*

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{\log x}{x}.$$

a). Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. *Calcule los signos de* f *y de* f'. *Bosqueje una idea del gráfico solo con estos datos.*

b). ¿Cual es mas grande, e^π *o* π^e*?*

c). Demuestre que si $0 < x \leq 1$, *o* $x = e$, *entonces el único número* y *que cumple* $x^y = y^x$ *es* $y = x$*; pero si* $x > 1$, $x \neq e$, *entonces existe exactamente un número* $y \neq x$ *que cumple* $x^y = y^x$*; más aún, si* $x < e$, *entonces* $y > e$ *y si* $x > e$, *entonces* $y < e$.

Solución. a). Se tiene que, cuando $x \to \infty$, $\log x \to \infty$ y $x \to \infty$ con $x \neq 0$ en $(0, +\infty)$ con lo que podemos usar L'Hopital para concluir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Además,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x} = -\lim_{x\to 0^+} \underbrace{-\log(x)}_{\to\infty} \underbrace{x^{-1}}_{\to\infty} = -\infty.$$

Como $x \in (0,\infty)$, entonces $\operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(\log(x))$ y se concluye que f **es negativo en** $(0,1)$, f **es positivo en** $(1,+\infty)$ y f **es nulo en** 1. Además,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

con lo que $\operatorname{sgn}(f'(x)) = \operatorname{sgn}(1 - \log x)$ y f' **es positivo en** $(0,e)$, f' **es negativo en** $(e,+\infty)$ y f' **es nulo en** e.

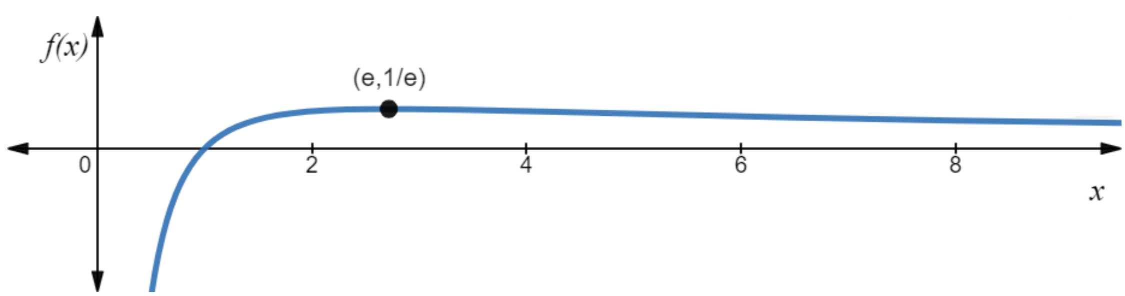

Figura 1: Gráfico de $\frac{\log x}{x}$.

b). Como f' es positivo a la izquierda de e, negativo a la derecha de e y nulo en e, se sigue que el máximo se alcanza en e. Luego, necesariamente

$$\frac{\log \pi}{\pi} < \frac{\log e}{e}$$

y se sigue que
$$\log \pi^e < \log e^\pi$$
y, como exp es estrictamente creciente,
$$\pi^e < e^\pi.$$

c). Notemos que $x^y = y^x \iff f(x) = f(y)$.

Caso $0 < x \leq 1$ o $x = e$: Sea $f(x) = f(y)$. si $x = e$, como f es estrictamente creciente a la izquierda de e y estrictamente decreciente a la derecha de e, se concluye que $y = e$. Si $0 < x \leq 1$, entonces $f(y) \leq 0$ con lo que $0 < y \leq 1$. Como f es estrictamente creciente en este intervalo, necesariamente $y = x$.

Caso $x > 1$ y $x \neq e$: En este caso, $0 < f(x) < f(e)$.

Si $1 < x < e$, sea $z > e$ tal que $f(z) < f(x)$ (existe tal z pues $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$). Entonces $f(x) \in (f(z), f(e))$ y, por TVI, existe $y \in (e, z)$ tal que $f(y) = f(x)$ y, como $x \in (1, e)$ y $y \in (e, z)$, entonces $x \neq y$ y concluimos la existencia. Para demostrar la unicidad: Si $c \notin \{x, y\}$ cumple $f(c) = f(x)$, hay dos casos: $c \in (0, e)$; se sigue que $\exists \xi \in (c, x),\ f'(\xi) = (f(x) - f(c))/(x - c) = 0$, una contradicción (pues f no tiene puntos críticos en $(0, e)$). El segundo caso es $c \in (e, \infty)$ y el mismo argumento aplica con $f'(\xi') = 0$ con $\xi' \in (e, \infty)$ y obtenemos la unicidad.

Ahora, si $x > e$, entonces $f(x) \in (0, f(e)) = (f(1), f(e))$ con lo que existe un $y \in (1, e)$ tal que $f(y) = f(x)$. Para la unicidad, se sigue el mismo argumento de antes.

□

Problema 2. *a). Calcule* $\sin 1$ *con un error de, a lo más,* 10^{-4}.

b). Muestre que e *es irracional.*
Hint: *Los polinomios de Taylor nos permiten ver como es una función, similar a cuando descomprimimos un archivo* **.zip**.

Solución. a). Sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $\xi \in (0, 1)$ tal que
$$\sin(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} + \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$$
y nosotros queremos imponer que $|\frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}| \leq 10^{(-4)}$. Notemos que $|\frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}| \leq \frac{1}{(2n+2)!}$ con lo que basta usar $n = 3$ pues $\frac{1}{(2\cdot 3+2)!} = \frac{1}{8!} = \frac{1}{40320} < \frac{1}{10000} = 10^{-4}$. Con esto, calcularemos el polinomio de Taylor de orden $2n + 1$ con $n = 3$. Esto es:
$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} = \frac{4241}{5040} = 0{,}8414\overline{682539}$$
$$\therefore \sin(1) \approx 0{,}8414\overline{682539} \text{ con un error de a lo más } 10^{-4}.$$

b). Sabemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $\xi \in (0, 1)$ tal que
$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}.$$
Supongamos que e es racional, digamos $e = a/b$, donde a y b son enteros positivos. Entonces, para $n > b$ y $n > 2$,
$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}$$
$$\Longrightarrow \frac{n!a}{b} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{n!e^\xi}{(n+1)!}$$
y, como todos los términos, excepto quizás $n!e^\xi/(n+1)!$, son número naturales (el lado izquierdo de la igualdad es natural pues $n > b$), se sigue que $n!e^\xi/(n+1)!$ debe ser natural. Pero
$$0 < \frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}$$

entonces (como sabemos que $e < 3$)

$$0 < \frac{n!e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{e}{n+1} < \frac{e}{3} < 1$$

lo que no es posible para un número entero. Se concluye que e es irracional.

□

Problema 3. *a). Sea $g\colon [0,1] \to [0,1]$ continua tal que $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$. Muestre que cualquier función continua $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es tal que su grafo intersecta al grafo de g.*

b). Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ continua y diferenciable tal que $1 \notin f'([0,1])$. Muestre que el grafo de f intersecta la diagonal del cuadrado $[0,1]^2$ exactamente un un punto.

Solución. a). Si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$, estamos listos. Si no, sea $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida mediante $x \mapsto f(x) - g(x)$. Se tiene que $h(0) = f(0) - g(0) = f(0) > 0$ y $h(1) = f(1) - g(1) = f(1) - 1 < 0$. Se sigue, por el TVI, que existe un $c \in [0,1]$ que cumple $h(c) = 0$, en particular, $f(c) = g(c)$ y se concluye.

b). Por la parte anterior, sabemos que f intersecta a $id(x) := x$ en al menos un punto. Mostremos que intersecta en exactamente un punto: Sea x_1 y x_2 dos puntos distintos (asumiremos $x_1 < x_2$) que cumplen $f(x_1) = x_1$ y $f(x_2) = x_2$. Entonces, por el TVM, existe un $\xi \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(\xi) = (f(x_1) - f(x_2))/(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)/(x_1 - x_2) = 1$, una contradicción. Es decir el grafo de f intersecta la diagonal en exactamente un único punto.

□

Problema 4. *Calcule los siguiente límites.*

a). $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{e^x + x}$

b). $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin(x)}$.

Solución. a). Notemos que $x^3 - 3x^2 + 2 \to \infty$ y $e^x + x \to \infty$ con $e^x + x \neq 0$ para $x \in (0, \infty)$. Con esto podemos aplicar L'Hopital para concluir que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{e^x + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 6x}{e^x + 1}$$

y nuevamente se tiene que $3x^2 - 6x \to \infty$ y $e^x + 1 \to \infty$ con $e^x + 1 \neq 0$ en $\mathbb{R}$ con lo que podemos usar L'Hopital (notemos que no es totalmente necesario ya que la exponencial crece más rápido que cualquier polinomio) para concluir que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{e^x + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x - 6}{e^x}$$

aquí podríamos usar álgebra de límites y límites conocidos para concluir, pero con L'Hopital, notando que $6x - 6 \to \infty$ y $e^x \to \infty$ con $e^x \neq 0$ en $\mathbb{R}$ con lo que se concluye que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{e^x + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

b). Notemos que $x^3 \to 0$ y $x - \sin(x) \to 0$ con $x - \sin x \neq 0$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Con esto, podemos aplicar L'Hopital para concluir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos(x)}$$

Ahora, Notemos que $3x^2 \to 0$ y $1 - \cos x \to 0$ con $1 - \cos x \neq 0$ para $x \in (-2\pi, 2\pi) \setminus \{0\}$ con lo que podemos usar L'Hopital para concluir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\sin(x)} = 6 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 6.$$

□

Problema 5. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $g \in C^2(\mathbb{R})$, es decir, g tiene segunda derivada continua. Calcule $f'(0)$ si*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

y $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = a$.

Solución.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(h)}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h^2}$$

con lo que, como $g(h) \to 0$ (pues g es diferenciable y por lo tanto continua) y $h^2 \to 0$ con $h^2 \neq 0$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces podemos usar la regla de L'Hopital para concluir que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g'(h)}{2h}$$

con lo que nuevamente $g'(h) \to 0$ (pues g' es diferenciable y por lo tanto continua) y $h \to 0$ con $h \neq 0$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con lo que podemos usar la regla de L'Hopital nuevamente y

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g''(h)}{2} = \frac{a}{2}.$$

$$\therefore f'(0) = \frac{a}{2}$$

□