FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Cristián Reyes
Auxiliares: Nicolás Cornejo y Sebastián Pincheira

Auxiliar 4

P1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Verifique que f es una función de clase C^1

b) Demuestre que f es una función de clase C^∞, y además

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} p_k(x)f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

con $p_k(x)$ la familia de funciones racionales definida por la siguiente recurrencia

$$p_{k+1}(x) = p_k'(x) + \frac{2}{x^3}p_k(x), \forall k \in \mathbb{N}; \quad p_0(x) = 1$$

donde $p_k(x)$ tiene grado $3k$ en $\mathbb{R}[\frac{1}{x}]$

c) Determine los puntos críticos de f, estudie máximos y mínimos.

d) Determine si la función f es analítica en $x_0 = 0$

Def. Una función f de clase C^∞ se dice **analítica** en x_0, si existe un $\varepsilon > 0$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} T_k(x) = f(x), \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

Donde T_k denota al polinomio de Taylor de orden k en torno a x_0.

P2 El objetivo de esta pregunta es estimar la solución de la ecuación $x^3 = x^2 + 1$. Para ello, proceda como sigue:

a) Pruebe que la ecuación posee solución.

b) Estudie el crecimiento y la convexidad de la función $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

c) Use la parte anterior para deducir que la ecuación posee solución única.

d) Aplique el método de Newton para hallar una sucesión (x_n) que converja a dicha solución.

P3 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$. Determine los siguientes elementos de f:

a) Dominio, ceros, signos, asíntotas y continuidad

b) Diferenciabilidad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos.

c) Intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión.

d) Recorrido y bosquejo del gráfico.

e) Verifique que al aproximar $f(x)$ por su polinomio de Taylor de orden 1 en torno a $x_0 = 1$, en el intervalo $[1, e]$ el error asociado es menor o igual a $(e-1)^2$.

Def (Derivadas de orden superior)**.** Dada una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se denota $f^{[0]} = f$ y se define inductivamente $f^{[k]} = (f^{[k-1]})'$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Diremos que f es k-veces derivable en x_0, si $f^{[k-1]}$ es derivable en x_0

Def (Clase C^k)**.** Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^k, si la función f es k-veces derivable en A, y la función $f^{[k]} : A \to \mathbb{R}$ es continua.

Def (Clase C^∞)**.** Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞, si es de clase C^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teo (Taylor)**.** *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, k-veces derivable en x_0 y sea*

$$T_f^k(h) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{[n]}(x_0)}{n!} h^n$$

su polinomio de Taylor de orden k en torno a x_0. Entonces

$$f(x) = T_f^k(x - x_0) + o((x - x_0)^k)$$

Donde se satisface $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{o(h^k)}{h^k} = 0.$

Def. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en x_0. Diremos que x_0 es un **punto de inflexión** de f, si la función f cambia de convexidad en $x = x_0$ (pasa de ser cóncava a convexa, o viceversa)

Prop (Caracterización de puntos críticos)**.** *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, k-veces derivable (con $k \geq 2$) en $x_0 \in (a, b)$, con $f^{[n]}(x_0) = 0$ para $n \in \{1, ..., k\}$, y $f^{[k]}(x_0) \neq 0$. Entonces hay 3 casos posibles:*

1. *Si k es par y $f^{[k]}(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo local.*
2. *Si k es par y $f^{[k]}(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo local.*
3. *Si k es impar, entonces x_0 es un punto de inflexión*

Teo (Estimación del error)**.** *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(k + 1)$-veces derivable en todo punto de (a, b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en torno a $x_0 \in (a, b)$. Entonces $\forall x \neq x_0$, existe un $\xi \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$, tal que*

$$f(x) = T_f^k(x - x_0) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k + 1)!}(x - x_0)^{k+1}$$

Def (Método de Newton)**.** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que existe un $x^* \in A$ que cumple $f(x^*) = 0$. Sea $x_0 \in A$ un valor cercano a x^* tal que $f'(x_0) \neq 0$. Se define la iteración del método de Newton con punto de partida x_0, como la secuencia (x_n) definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \forall n \geq 0$$

El cual está bien definido siempre que $f'(x_n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Teo (Convergencia Local)**.** *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2, y sea $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$ y $f'(x^*) \neq 0$. Entonces existen constantes $\varepsilon > 0$ y $M > 0$, tales que para cada punto de partida $x_0 \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, el método de Newton queda bien definido y converge a x^* con tasa de convergencia cuadrática, es decir*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2$$