MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.
Profesor: Cristián Reyes.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo
29 de agosto de 2023

Pauta Auxiliar 3

$D_x$erivadas

Problema 1. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Caclule el límite*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^n(x)}{x}$$

sin usar límites conocidos que no sean $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$.

Solución. Notando que el numerador y denominador tienden a infinito y que $x \neq 0$ a partir de cierto punto, podemos aplicar L´Hopital con lo que obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^n(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n\log^{n-1}(x)}{x}$$

pero esto nos lleva a la misma situación anterior y podemos usar L'Hopital nuevamente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^n(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)\log^{n-2}(x)}{x}$$

llegando nuevamente a la misma conclusión: nuestra intuición nos dice que, luego de aplicar L'Hopital n-veces obtenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^n(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{x}$$

con lo que es de esperar que el límite sea 0.

Mostraremos por inducción que el límite es 0. Para $n = 1$ se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^n(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\log^n(x)}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Si asumimos que el límite es 0 para $n-1$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^n(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\log^n(x)}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n\log^{n-1}(x)/x}{1} = n\lim_{x\to\infty} \frac{\log^{n-1}(x)}{x} = 0.$$

Con lo que, por inducción, $\lim_{x\to\infty} \frac{\log^n(x)}{x} = 0$. □

Problema 2. *a). Sea I un intervalo abierto y $f, g\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciables con $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$. Demuestre que f y g difieren en una constante.*

b). Sea $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ un homomorfismo de grupo de $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ a $(\mathbb{R}, +)$ (es decir $\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$). Asuma que f es diferenciable en 1. Demuestre que f es de la forma $f(x) = a\log(x)$ para alguna constante a.

Solución. a). Hint: $h := f - g$.

b). Hint: ¿Que es $\frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}$ para $x, q \in \mathbb{R}_+$? ¿Que podemos decir de $f(1)$?

□

Problema 3. *Grafique la función $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definido mediante $x \mapsto x\log^2(x)$.*

Solución. Se tiene que $f(x) = 0$ si y solo si $\log(x) = 0$ con lo que 1 es el único 0 de la función. Además, aplicando L'Hopital dos veces (en ambos casos el numerador y denominador tienden a infinito y el denominador es no-nulo a partir de cierto punto),

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x\log^2(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log^2(x)}{x^{-1}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\log(x)x^{-1}}{-x^{-2}} \\
&= -2\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(x)}{x^{-1}} \\
&= -2\lim_{x\to 0^-} \frac{1/x}{-x^{-2}} \\
&= 2\lim_{x\to 0^-} x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

y, como log y $(\bullet)^2$ son crecientes en el dominio y $\log^2(e) = 1$, entonces $\forall x > e,\ \log^2(x) \geq \log^2(e) = 1$ y se sigue que $\forall x > e,\ f(x) \geq x$ de lo que se sigue que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Ahora encontremos los puntos críticos:

$$f'(x) = (\frac{d}{dx}x)\log^2(x) + x\frac{d}{dx}\log^2(x) = \log^2(x) + 2\log(x) = \log(x)(\log(x)+2)$$

con lo que 1 y e^{-2} son los puntos críticos. Además, como log es creciente, $f'(x) > 0$ para $x \in (0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$, y $f'(x) < 0$ para $x \in (e^{-2}, 1)$ con lo que f es creciente en $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $(e^{-2}, 1)$. Se sigue que $f(e^{-2}) = 4e^{-2}$ es máximo local y $f(1) = 0$ es mínimo local. Estudiemos ahora la convexidad. Para esto, calculamos la segunda derivada:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}f'(x) \\
&= \frac{d}{dx}\log(x)(\log(x)+2) \\
&= \frac{1}{x}(\log(x)+2) + \log(x)\frac{1}{x} \\
&= 2\frac{\log(x)+1}{x}
\end{aligned}$$

como el denominador es siempre positivo, esta expresión tiene el mismo signo que el numerador: $\forall x \in (0, e^{-1}),\ f''(x) < 0$, $\forall x \in (e^{-1}, \infty),\ f''(x) > 0$ y $f''(e^{-1}) = 0$. Con esto, la función será cóncava desde 0 a e^{-1} y convexa desde e^{-1} en adelante. Para graficar la función, graficamos primero los puntos correspondientes a los ceros de la función: $(1, 0)$; luego los puntos correspondientes a los puntos extremos: $(e^{-2}, 4e^{-2})$ y $(1, 0)$. Luego los puntos correspondientes a los puntos de inflexión (donde $f'' = 0$, en este caso, sabemos que a la derecha de este punto la función es convexa y a la izquierda es cóncava): (e^{-1}, e^{-1}). Para terminar, dibujamos una curva que una a todos estos puntos y que tome en consideración: los puntos del dominio donde la función es convexa y cóncava, donde la función es creciente y decreciente y los límites en los extremos del dominio de la función. Con esto el gráfico de la función queda descrito por

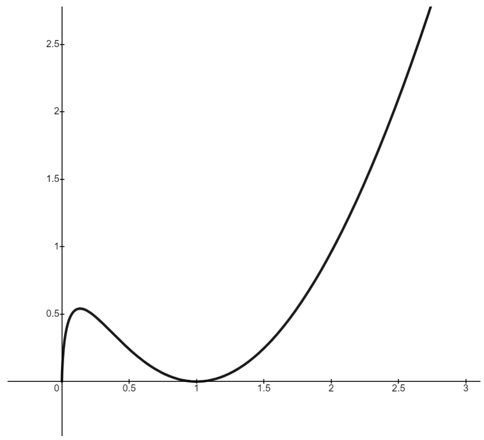

Figura 1: Gráfico de $x\log^2(x)$.

$\square$

Problema 4. *a).* *Sea $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ y $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Demuestre que f alcanza su mínimo en (a,b).*

b). *Los encargados de la escenografía de una obra de teatro deben construir un castillo donde, con una escalera portátil (no retráctil), subirá la princesa. Siguiendo la normativa de seguridad del teatro, la escalera debe formar un ángulo de $75°$ con el piso. Para llegar al escenario, es necesario pasar con la escalera, de manera horizontal, por un pasillo que posee una esquina: antes de la esquina, el pasillo mide $a[m]$ pero, después de la esquina, el pasillo mide $b[m]$ (ver figura). El equipo de escenografía quiere impresionar y hacer el castillo lo más grande posible, comprarán una escalera exclusivamente para este fin. ¿De que tamaño le dirán al director que será el castillo? (La escalera llega hasta la punta del castillo)*

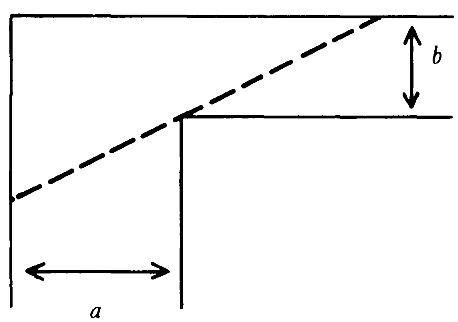

Figura 2: Esquina por la que pasará la escalera.

Solución. *a).* Sea $x_0 \in (a,b)$. Sea $\alpha \in (a, x_0)$ y $\beta \in (x_0, b)$ tal que $\forall x \in (a,\alpha) \cup (\beta, b),\ f(x) > f(x_0)$. Como f es continua, entonces sabemos que adquiere un mínimo en algún $y \in [\alpha, \beta]$. Este mínimo es mínimo en todo el dominio: en efecto, por ser mínimo en $[\alpha,\beta]$, $f(y) \le f(x_0)$ por lo que para $x \in (a,\alpha) \cup (\beta, b),\ f(y) \le f(x)$ e y es mínimo global.

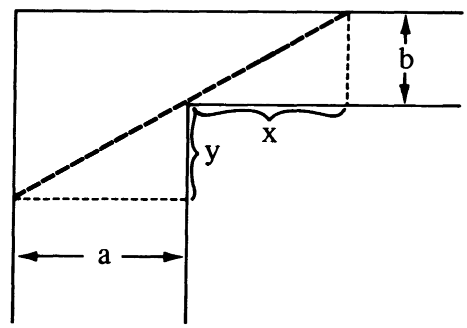

Figura 3: Pasillo por el que pasará la escalera.

b). La escalera tendrá que ser, necesariamente, menor que el largo de la diagonal de la figura anterior, para todo x e y. Notando que en la figura anterior se tiene que $\frac{b}{x} = \frac{y}{a}$, se sigue que el largo de la diagonal será

$$\sqrt{b^2+x^2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2b^2}{x^2}} = \sqrt{b^2+x^2} + \frac{a}{x}\sqrt{x^2+b^2} = \left(1+\frac{a}{x}\right)\sqrt{x^2+b^2}.$$

El mayor largo de la escalera que puede pasar, será el menor largo que alcanza esta diagonal, es decir, tenemos el siguiente problema de minimización:

$$\begin{cases} \text{mín} & L(x) := \left(1+\frac{a}{x}\right)\sqrt{x^2+b^2} \\ \text{s.t.} & x \in (0,\infty) \end{cases}$$

Notando que $\forall x > 0,\ L(x) \geq \text{máx}\{ab/x, x\}$ se concluye que $\text{lím}_{x\to 0^+} L(x) = \text{lím}_{x\to\infty} L(x) = \infty$ (recordemos que $a, b > 0$ pues son los anchos del pasillo). Con lo que, por la parte anterior, el problema tiene solución. Para solucionar el problema, computaremos la derivada de L:

$$\begin{aligned} L'(x) &= \frac{d}{dx}\left(1+\frac{a}{x}\right)\sqrt{x^2+b^2} \\ &= (\frac{d}{dx}1 + a/x)\sqrt{x^2+b^2} + (1+a/x)\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+b^2} \\ &= (-a/x^2)\sqrt{x^2+b^2} + (1+a/x)\frac{1}{2\sqrt{x^2+b^2}}(2x) \\ &= -\frac{a}{x^2}\sqrt{x^2+b^2} + \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} \end{aligned}$$

Con lo que sabemos que la solución del problema cumple

$$-\frac{a}{x^2}\sqrt{x^2+b^2} + \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} = 0,$$

es decir,

$$-\frac{a}{x^2}(x^2+b^2) + x + a = 0.$$

En otras palabra,

$$x^3 + ax^2 = ax^2 + ab^2$$

y se concluye que

$$x = a^{1/3}b^{2/3}$$

es el único punto que tiene derivada nula. Como sabemos que la función alcanza su mínimo y sabemos que este tiene derivada nula, se concluye que $a^{1/3}b^{2/3}$ minimiza el largo. Con esto, la escalera debe tener un largo de $L(a^{1/3}b^{2/3})$ y el castillo tendrá un alto de

$$L(a^{1/3}b^{2/3})\sin\left(75\frac{\pi}{180}\right)[m]$$

pues sin es el opuesto (el castillo) partido la hipotenusa (la escalera).

□