

MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral-2023.

Profesor: Cristián Reyes.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira & Nicolas Cornejo

29 de agosto de 2023



AUXILIAR 4

D_x erivadas

Problema 1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^n(x)}{x}$$

sin usar límites conocidos que no sean $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$.

Problema 2. a). Sea I un intervalo abierto y $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables con $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$. Demuestre que f y g difieren en una constante.

b). Sea $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ un homomorfismo de grupo de $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ a $(\mathbb{R}, +)$ (es decir $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$). Asuma que f es diferenciable en 1. Demuestre que f es de la forma $f(x) = a \log(x)$ para alguna constante a .

Problema 3. Grafique la función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definido mediante $x \mapsto x \log^2(x)$.

Problema 4. a). Sea $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ y $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$. Demuestre que f alcanza su mínimo en (a, b) .

b). Los encargados de la escenografía de una obra de teatro deben construir un castillo donde, con una escalera portátil (no retráctil), subirá la princesa. Siguiendo la normativa de seguridad del teatro, la escalera debe formar un ángulo de 75° con el piso. Para llegar al escenario, es necesario pasar con la escalera, de manera horizontal, por un pasillo que posee una esquina: antes de la esquina, el pasillo mide $a[m]$ pero, después de la esquina, el pasillo mide $b[m]$ (ver figura). El equipo de escenografía quiere impresionar y hacer el castillo lo más grande posible, comprarán una escalera exclusivamente para este fin. ¿De qué tamaño le dirán al director que será el castillo? (La escalera llega hasta la punta del castillo)

Apéndice.

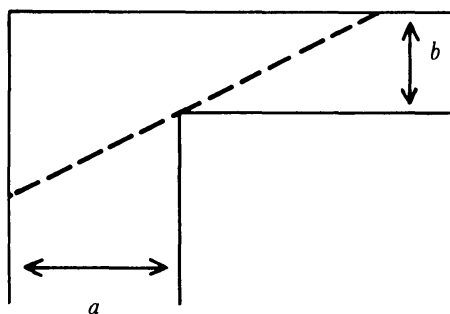


Figura 1: Esquina por la que pasará la escalera.

Teorema (Criterio de primero orden). Si $\bar{x} \in (a, b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$.

Teorema (TVM). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Teorema (L'Hopital). Sean $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en (a, b) , tales que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = L$ con $L \in \{0, \infty\}$, y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)/g'(x)$ siempre que este último límite exista.

Teorema (monotonía). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) para $x \in (a, b)$, entonces f es creciente (resp. decreciente) en $[a, b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonicidad es igualmente estricta.