

**MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral****Profesor:** Cristián Reyes**Auxiliares:** Nicolás Cornejo y Sebastián Pincheira

Auxiliar 2

P1 Estudiar la continuidad de la función $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ con } p, q \in \mathbb{N} \text{ coprimos} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

P2 Sea $f : [0, 2] \rightarrow [0, 4]$ continua. Pruebe que existe un $x_0 \in [0, 2]$ tal que $f(x_0) = x_0^2$

P3 Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Estudie la continuidad uniforme de f en cada caso:

- a) Si $A = (0, \infty)$
- b) Si $A = (a, b)$, con $0 < a < b$
- c) Si $A = [a, \infty)$, con $a > 0$

P4 Calcule la derivada de la función $f(x) = x^{\arctan(x)}$

Problemas propuestos

P5 Demuestre que la ecuación $x^3 \cdot 2^x = 2x + 1$ posee más de una solución.

P6 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Pruebe que existe un $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

P7 Sea $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Estudie la continuidad uniforme de f .

Recuerdos

Def. Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **continua** en $x_0 \in A$ si:

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

Teo (Épsilon-Delta). $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in A$ ssi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Def. Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **continua** si f es continua en x_0 , para todo $x_0 \in A$

Teo (Bolzano). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = 0$.

Teo (TVI). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $c, d \in f([a, b])$ con $c \leq d$. Entonces para todo $y_0 \in [c, d]$, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0$

Teo (Weierstrass). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.

Teo. Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$ es continua.

Def. Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Prop. Toda función uniformemente continua, es continua.

Teo. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua.