FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1001-1 Introducción al Cálculo
Profesor: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 13: Exponencial y Logaritmo

P1 Calcule los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1) - \ln(n))$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln(1 + e^n + e^{2n})$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$

P2 Sea la función $f(x) = \ln(e^x + a)$ con $0 < a < 1$. Estudie su dominio, ceros, crecimiento, signos, inyectividad, sobreyectividad y determine su función inversa.

P3 Se define la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante la siguiente relación de recurrencia:

$$s_{n+1} = \ln\left(\sqrt[3]{3s_n + 1}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Con $s_1 > 0$ una constante conocida.

a) Pruebe que $s_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) Demuestre que la sucesión es decreciente

c) Concluya que la sucesión es convergente y que su límite L satisface la ecuación:

$$e^{3L} = 3L + 1$$

P4 [Propuesto] Calcule los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\sqrt{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n\ln(6)}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-3n^2}\right)^{5n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n^2(e^{1/n^2} - 1))$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n^n}\right) + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \tan\left(\frac{n}{4}\ln\left(\frac{n+\pi}{n}\right)\right)$

P5 [Propuesto] Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $e^{10+5\ln(x)} = x^{\ln(x^3)+4}$

b) $\log_x 2 + \log_{x^2} 9 + \log_{x^3} \frac{1}{x} = 0$

P6 [Propuesto] Sea a_n una sucesión nula distinta de 0 y $b_n = \dfrac{2}{e^{6a_n} - 1}$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 3a_n)^{b_n}$

Def (Exponencial)**.** Se define la función exponencial como:

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Está bien definida ya que la sucesión es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. Se define $e := \exp(1)$

Prop 1 (Desigualdad exponencial)**.** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geq x + 1$

Prop 2 (Propiedades exponencial)**.** *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, entonces:*

- $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$
- $\exp(x) > 0$
- $x < 1 \implies \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $x < y \implies \exp(x) < \exp(y)$
- $\exp(px) = (\exp(x))^p$
- $\lim \exp(-n) = 0$
- $\exp(\frac{x}{p}) = \sqrt[p]{\exp(x)}$
- $\lim \exp(\frac{1}{n}) = 1$

Prop 3. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *es biyectiva.*

Def (Logaritmo natural)**.** Se define la función $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como la inversa de la exponencial

Prop 4 (Desigualdad Logaritmo)**.** $\forall x > 0, \quad 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$

Prop 5 (Propiedades logaritmo)**.** *Sean* $x, y \in (0, +\infty)$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, entonces:*

- $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$
- $\ln(x) - \ln(y) = \ln(\frac{x}{y})$

Def (Potencia de exponente real)**.** Sea $a > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $a^\alpha := \exp(\alpha \ln a)$

Prop 6 (Potencias)**.** *Sea* $a > 0$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, entonces:*

- $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$
- $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$
- $(\exp x)^\alpha = \exp(\alpha x)$
- $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$

Def (Logaritmo de base a)**.** Sea $a > 0$ con $a \neq 1$, se define $\log_a x := \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Prop 7. *Sean* $x, y, a, b > 0$ *con* $a, b \neq 1$*, entonces:*

- $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$
- $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

Prop 8 (Límites conocidos)**.** *Sea* $(a_n) \longrightarrow a$*, entonces:*

1. $\exp(a_n) \longrightarrow \exp(a)$
2. $\ln(a_n) \longrightarrow \ln(a)$
3. $\left(\dfrac{\exp(a_n) - \exp(a)}{a_n - a}\right) \longrightarrow \exp(a)$
4. $\left(\dfrac{\ln(a_n) - \ln(a)}{a_n - a}\right) \longrightarrow \dfrac{1}{a}$
5. $\sin(a_n) \to \sin(a)$
6. $\cos(a_n) \to \cos(a)$