FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1001-1 Introducción al Cálculo
Profesor: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Pauta Auxiliar 12

P1 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante, calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{[\alpha k^2]}{n^3}$$

Sol. Expandamos la suma:

$$\frac{[\alpha]}{n^3} + \frac{[4\alpha]}{n^3} + \cdots \frac{[n^2\alpha]}{n^3}$$

Debemos acotar los términos de la suma de alguna forma, para poder usar el Teorema del Sándwich, para ello recordemos la desigualdad de la parte entera vista en semana 8:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < [x] \leq x$$

Podemos usar esta desigualdad en cada uno de los términos de la suma, para así acotar la suma por una suma menor y otra mayor de la siguiente manera:

$$\frac{\alpha - 1}{n^3} + \frac{4\alpha - 1}{n^3} + \cdots \frac{n^2\alpha - 1}{n^3} < \frac{[\alpha]}{n^3} + \frac{[4\alpha]}{n^3} + \cdots \frac{[n^2\alpha]}{n^3} \leq \frac{\alpha}{n^3} + \frac{4\alpha}{n^3} + \cdots \frac{n^2\alpha}{n^3}$$

Escribamos cada una de las sumas como sumatorias para ver más claro su valor y así poder calcular sus límites:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha k^2 - 1}{n^3} < \sum_{k=1}^{n} \frac{[\alpha k^2]}{n^3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha k^2}{n^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^3}\left(\alpha \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} 1\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{[\alpha k^2]}{n^3} \leq \frac{\alpha}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Dónde se usaron las propiedades de linealidad de la sumatoria para separar y sacar las constantes, luego calculando las sumatorias con las fórmulas tan conocidas vistas en Introducción al Álgebra nos queda:

$$\frac{1}{n^3}\left(\alpha \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{[\alpha k^2]}{n^3} \leq \frac{\alpha}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{n}{n^3} < \sum_{k=1}^{n} \frac{[\alpha k^2]}{n^3} \leq \frac{\alpha n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Luego como:

$$\lim \frac{\alpha n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{n}{n^3} = \lim \frac{\alpha n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2\alpha}{6} = \frac{\alpha}{3}$$

Esto por álgebra de límites y el límite conocido de la división de polinomios de igual grado, concluimos por Teorema del Sándwich que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{[\alpha k^2]}{n^3} = \frac{\alpha}{3}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

P2 Estudie la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $\dfrac{4^{n+1}+n^2 3^n}{n^2\cos(n)+2^{2n}}$

b) $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{3n}$

c) $\left(1+n^5\left(\dfrac{n+\sin(n)}{3n+1}\right)^n\right)^n$

d) $\sqrt[n]{n\cdot 3^n+3\cdot 5^n}$

Sol.

a) Notamos que tanto numerador como denominador tienen un orden de crecimiento 4^n, dividiendo numerador y denominador por este término obtenemos:

$$\frac{4^{n+1}+n^2 3^n}{n^2\cos(n)+2^{2n}}\cdot\frac{\frac{1}{4^n}}{\frac{1}{4^n}}=\frac{4+n^2\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n^2\left(\frac{1}{4}\right)^n\cos(n)+1}$$

Como $|\frac{3}{4}|<1$ y $|\frac{1}{4}|<1$, se tiene que $n^2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ y $n^2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ son sucesiones nulas, como además $\cos(n)$ es una sucesión acotada, se tiene que $n^2\left(\frac{1}{4}\right)^n\cos(n)$ también es nula, luego por álgebra de límites se concluye

$$\frac{4+n^2\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n^2\left(\frac{1}{4}\right)^n\cos(n)+1}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{4+0}{0+1}=4$$

b) Notar que:

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{3n}=\left(\left(1+\frac{(-1)}{n^2}\right)^n\right)^3=((1+h_n)^n)^3$$

Donde se definió $h_n=\frac{-1}{n^2}$, notar que h_n y $nh_n=\frac{-1}{n}$ son sucesiones nulas. Por lo tanto, $(1+h_n)\to 1$. Luego, por álgebra de límites:

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{3n}=((1+h_n)^n)^3\xrightarrow{n\to\infty}1^3=1$$

c) Sea $q_n=\dfrac{n+\sin(n)}{3n+1}$, notar que

$$q_n=\frac{n+\sin(n)}{3n+1}=\frac{1+\sin(n)\cdot\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1+0}{3+0}=\frac{1}{3}$$

Pues el seno es acotado y $\dfrac{1}{n}$ es nula. Como $\lim q_n=\frac{1}{3}$, podemos tomar $\varepsilon=\frac{1}{6}$ en la definición de convergencia, para obtener que existe un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\leq q_n\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\quad\forall n\geq n_0$$

$$\implies \frac{1}{6} \leq q_n \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq n_0$$
$$\implies \left(\frac{1}{6}\right)^n \leq (q_n)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \geq n_0$$
$$\implies n^k \left(\frac{1}{6}\right)^n \leq n^k (q_n)^n \leq n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \geq n_0, \forall k \in \mathbb{N}$$

Como $|\frac{1}{6}| < 1$ y $|\frac{1}{2}| < 1$, las sucesiones $n^k \left(\frac{1}{6}\right)^n$ y $n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$ son nulas. Luego, por Teorema del Sándwich, se concluye que $n^k(q_n)^n$ es una sucesión nula para cada $k \in \mathbb{N}$.
Sea $h_n = n^5(q_n)^n$, notemos que h_n y $nh_n = n^6(q_n)^n$ son nulas por lo anterior. Luego, se concluye que:

$$(1 + h_n)^n = \left(1 + n^5 \left(\frac{n + \sin(n)}{3n + 1}\right)^n\right)^n \to 1$$

d) Como $3 < 5$, se tiene que $3^n \leq 5^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego, se tiene que:

$$n \cdot 3^n \leq n \cdot 5^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además, si $n \geq 3$, se tiene que $3 \cdot 5^n \leq n \cdot 5^n$, luego:

$$3 \cdot 5^n \leq n \cdot 3^n + 3 \cdot 5^n \leq n \cdot 5^n + n \cdot 5^n, \quad \forall n \geq 3$$
$$\implies \sqrt[n]{3 \cdot 5^n} \leq \sqrt[n]{n \cdot 3^n + 3 \cdot 5^n} \leq \sqrt[n]{n \cdot 5^n + n \cdot 5^n}, \quad \forall n \geq 3$$

Notar que $\sqrt[n]{3 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{3} \cdot 5 \to 5$ y $\sqrt[n]{n \cdot 5^n + n \cdot 5^n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot 5 \to 5$ por álgebra de límites. Luego por Teorema del Sándwich, se concluye que:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n \cdot 3^n + 3 \cdot 5^n} = 5$$

P3 Considere la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$a_1 = a \in (0,1) \qquad a_{n+1} = a_n(2-a_n)$$

a) Demuestre que $a_n \in (0,1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

b) Demuestre que (a_n) es estrictamente creciente.

c) Concluya que la sucesión (a_n) es convergente y calcule su límite.

Sol. *a*) Como queremos probar algo para todos los naturales, podemos usar inducción:

Caso base: Para $n = 1$ tenemos que $a_1 = a$ con $0 < a < 1$, por lo que se cumple directamente

Hipótesis inductiva: Supongamos que $a_n \in (0,1)$ para algún $n \in \mathbb{N}$

Paso inductivo: Veamos que $a_{n+1} \in (0,1)$, esto es equivalente a probar que $a_n(2-a_n) \in (0,1)$, por hipótesis tenemos que:

$$0 < a_n < 1 \Rightarrow -1 < -a_n < 0 \Rightarrow 1 < 2 - a_n < 2$$

Luego como $a_n \in (0,1)$ y $(2-a_n) \in (1,2)$, tenemos que $a_n(2-a_n) = a_{n+1} \in (0,2)$ que no es precisamente lo que queríamos concluir, pues nos falta acotar superiormente por 1, demostremos esto aparte, nos falta ver que $a_{n+1} < 1$, esto es equivalente a:

$$a_n(2-a_n) < 1 \Leftrightarrow 2a_n - a_n^2 < 1 \Leftrightarrow (a_n - 1)^2 > 0$$

Como un cuadrado siempre es no negativo y solo vale 0 cuando lo del paréntesis es 0, se obtiene que lo anterior es verdadero, pues sabemos por hipótesis que $a_n < 1$.

Luego por el principio de inducción, se concluye que $a_n \in (0,1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

b) Debemos probar que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es equivalente a probar que $a_{n+1} - a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, desarrollemos este término:

$$a_{n+1} - a_n = a_n(2-a_n) - a_n = a_n(1-a_n)$$

Que es positivo por ser producto de números positivos, pues $a_n > 0$ y $a_n < 1 \Rightarrow 1 - a_n > 0$, con esto concluimos entonces que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, (a_n) es una sucesión estrictamente creciente.

c) Por la parte (a) sabemos que (a_n) es acotada, por la parte (b) sabemos que es estrictamente creciente, por lo tanto, en virtud del Teorema de las sucesiones monótonas tenemos que la sucesión (a_n) es convergente, es decir, $\exists \lim a_n = L \in \mathbb{R}$.
Para calcular su límite usaremos la igualdad de recurrencia y aplicaremos límite sobre ella, notemos antes de eso que la sucesión a_{n+1} también converge a L, pues a_n converge a L (ejercicio semana 9), luego aplicando límite a ambos lados nos queda:

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n(2-a_n) \Rightarrow L = \lim a_n \cdot (\lim 2 - \lim a_n) \Rightarrow L = L(2-L)$$

Donde usamos álgebra de límites en el lado derecho, luego el límite de la sucesión debe satisfacer la ecuación $L = L(2-L)$, resolvamos esta ecuación:

$$L = L(2-L) \Rightarrow L = 2L - L^2 \Rightarrow L^2 - L = 0 \Rightarrow L(L-1) = 0 \Rightarrow L = 0 \ \vee \ L = 1$$

Con esto tenemos dos candidatos para ser límite de la sucesión, pero como el límite es único debemos descartar uno, para ello recordemos que la sucesión es estrictamente creciente y como $a_1 = a$, se tiene que $a_n \geq a$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando límite se obtiene que $L \geq a$, por lo tanto $L > 0$ y con ello se concluye

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$