FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1001-5 Introducción al Cálculo
Profesor: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Pauta Auxiliar 3

P1 Identifique el lugar geométrico de las siguientes relaciones, señalando los elementos principales de cada lugar geométrico:

a) $A : 3y - 10x + 7 = 0$

b) $B : x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$

c) $C : x^2 + y^2 + 10x - 4y - 33 \leq 0$

d) $D : x^2 + y^2 + x + 2023 \geq 0$

Sol. a*) La igualdad que define a la relación es equivalente a:*

$$y = \frac{10}{3}x - \frac{7}{3}$$

Que corresponde a una recta de pendiente $\frac{10}{3}$ *y coeficiente de posición* $\frac{-7}{3}$

b*) Completando los cuadrados de binomio, la relación equivale a:*

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$$

Que corresponde a una circunferencia de centro $(-1, 3)$ *y radio* $\sqrt{10}$

c*) Completando los cuadrados de binomio, la relación equivale a:*

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 \leq 62$$

Que se puede escribir como la unión de todas las circunferencias de la forma $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ *con* $r \leq \sqrt{62}$*. Por lo tanto, el lugar geométrico corresponde a un círculo cerrado de centro* $(-5, 2)$ *y radio* $\sqrt{62}$*.*

d*) Completamos el cuadrado de binomio del* x*, y obtenemos que la relación equivale a:*

$$(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq -2023 + \frac{1}{4}$$

Podemos notar que el lado izquierdo siempre es mayor o igual a cero, por ser una suma de cuadrados, mientras que el lado derecho es un número negativo. Por lo tanto, todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *satisface la relación* D*, es decir, el lugar geométrico corresponde a todo el plano* $\mathbb{R}^2$*.*

P2 Determine la ecuación general de la simetral de $A(-4,3)$ y $B(6,-1)$.

Sol. *La simetral de A y B corresponde a aquellos puntos (x,y) que están a la misma distancia de A y de B, es decir:*

$$d((x,y),A) = d((x,y),B)$$

Usando la fórmula de distancia entre puntos, se obtiene que:

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2}$$

Elevando al cuadrado a ambos lados para deshacernos de las raíces, y desarrollando los cuadrados de binomio se obtiene que:

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) = (x^2 - 12x + 36) + (y^2 + 2y + 1)$$

Reordenando y cancelando términos, se obtiene la siguiente igualdad:

$$y = \frac{5}{2}\,x - \frac{3}{2}$$

Que corresponde a una recta de pendiente $\frac{5}{2}$ y coeficiente de posición $\frac{-3}{2}$

Obs. Otra forma de resolver este problema, es utilizar que la simetral de dos puntos corresponde a la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por el punto medio del segmento.

P3 Determine la circunferencia que pasa por los puntos $A = (0, 5)$ y $B = (2, 1)$, y es tal que su centro se encuentra en la recta $x + y = 1$

Sol. *Digamos que la circunferencia tiene centro* (a, b) *y radio* $r > 0$*, entonces su ecuación es:*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Debemos determinar a, b *y* r*, para ello usaremos la información del enunciado, sabemos que* A *y* B *están en la circunferencia, por tanto deben satisfacer la ecuación que la define, es decir:*

$$a^2 + (5 - b)^2 = r^2$$

$$(2 - a)^2 + (1 - b)^2 = r^2$$

Además como el centro (a, b) *está en la recta* $x + y = 1$*, debe satisfacer su ecuación, es decir:*

$$a + b = 1$$

Con esto ya tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas, luego solo nos queda despejar, notemos que las dos primeras ecuaciones están igualadas a r^2*, entonces podemos igualar los lados izquierdos respectivos para obtener que:*

$$a^2 + (5 - b)^2 = (2 - a)^2 + (1 - b)^2$$

Desarrollando esta expresión obtenemos que:

$$a^2 + 25 - 10b + b^2 = 4 - 4a + a^2 + 1 - 2b + b^2 \Rightarrow 25 - 10b = 4 - 4a + 1 - 2b$$

Luego como $a + b = 1$*, podemos reemplazar* $a = b - 1$ *en la ecuación anterior, obteniendo:*

$$25 - 10b = 4 - 4(1 - b) + 1 - 2b \Rightarrow b = 2$$

Luego como $a + b = 1$*, tenemos que* $a = -1$ *y reemplazando en cualquiera de las dos primeras ecuaciones obtenemos que* $r^2 = 10$*, luego la ecuación de la circunferencia será:*

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$$

Que corresponde a una circunferencia de centro $(-1, 2)$ *y radio* $\sqrt{10}$*.*

P4 Considere una circunferencia C de ecuación $x^2+y^2=r^2$ y una recta L de ecuación $y=mx+n$. Muestre que la circunferencia C intersecta a la recta L ssi $(1+m^2)r^2 \geq n^2$

Sol. *La recta y la circunferencia se intersectan ssi existe un punto (x, y) que satisface ambas ecuaciones a la vez, es decir, verifica que $x^2+y^2=r^2$ y $y=mx+n$. Reemplazando la segunda ecuación en la primera, se obtiene que $x^2+(mx+n)^2=r^2$, por lo tanto, el sistema posee solución ssi la ecuación anterior posee solución.*

Notemos que reescribir la ecuación anterior como sigue:

$$(1+m^2)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$$

Que corresponde una ecuación cuadrática para x (pues $1+m^2 \neq 0$). Recordamos que una ecuación cuadrática posee solución ssi el discriminante es no negativo, es decir:

$$\Delta=(2mn)^2-4(1+m^2)(n^2-r^2) \geq 0$$

Desarrollando la desigualdad, se obtiene que esta equivale a $(1+m^2)r^2 \geq n^2$. Por lo tanto se concluye que la recta intersecta a la circunferencia si y solamente si $(1+m^2)r^2 \geq n^2$.

P5 Considere los puntos $A(0,0)$ y $B(0,2)$. Determine el lugar geométrico de los puntos $C(\alpha,\beta)$ con $\alpha > 0$, tales que: Si d_1 es la distancia de B al punto medio del trazo AC y d_2 es la distancia de A al punto medio medio del trazo BC, entonces $d_1^2 + d_2^2 = 5A$, con A el área del triángulo ABC.

Sol. *Usando la fórmula del punto medio obtenemos los puntos medios de AC y BC:*

$$Medio_{AC} = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \quad \wedge \quad Medio_{BC} = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{2+\beta}{2}\right)$$

Con esto podemos calcular d_1^2 y d_2^2 usando la fórmula de distancia entre puntos:

$$d_1^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \left(\frac{\beta}{2} - 2\right)^2 \quad \wedge \quad d_2^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \left(\frac{2+\beta}{2}\right)^2$$

Por otro lado, para calcular A, recordamos que el área de un triángulo corresponde al semi-producto entre una base y su respectiva altura, tomando como base el lado AB, tenemos que la respectiva altura corresponde a la distancia entre el punto C y el eje OY, que es exactamente la abscisa de C, por lo tanto:

$$A = \frac{2 \cdot \alpha}{2} = \alpha$$

Con esto ya tenemos todo lo necesario para proceder a encontrar el lugar geométrico, pues hemos expresado todas las variables del problema en función de α y β, que corresponden a las coordenadas de C, reemplazamos ahora en la ecuación con el objetivo de conocer que ecuación satisfacen α y β:

$$\frac{\alpha^2}{4} + \left(\frac{\beta}{2} - 2\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} + \left(\frac{2+\beta}{2}\right)^2 = 5\alpha$$

Expandiendo los cuadrados de binomio y agrupando obtenemos:

$$\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} - \beta + 5 = 5\alpha$$

Restando $m\alpha$ y multiplicando por 2 para eliminar las fracciones:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 10\alpha - 2\beta + 10 = 0$$

En este punto observamos la ecuación e identificamos la ecuación de una circunferencia, completamos los cuadrados de binomio para obtener así la siguiente expresión:

$$(\alpha - 5)^2 + (\beta - 1)^2 = 16$$

Lo que corresponde a una circunferencia de centro $(5,1)$ y radio 4.