FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1001-5 Introducción al Cálculo
Profesor: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 3

Geometría Analítica

P1 Identifique el lugar geométrico de las siguientes relaciones, señalando los elementos principales de cada lugar geométrico:

a) $A : 3y - 10x + 7 = 0$

b) $B : x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$

c) $C : x^2 + y^2 + 10x - 4y - 33 \leq 0$

d) $D : x^2 + y^2 + x + 2023 \geq 0$

P2 Determine la ecuación general de la simetral de $A(-4, 3)$ y $B(6, -1)$.

P3 Determine la circunferencia que pasa por los puntos $A = (0, 5)$ y $B = (2, 1)$, y es tal que su centro se encuentra en la recta $x + y = 1$

P4 Considere una circunferencia C de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y una recta L de ecuación $y = mx + n$. Muestre que la circunferencia C intersecta a la recta L ssi $(1 + m^2)r^2 \geq n^2$

P5 Considere los puntos $A(0, 0)$ y $B(0, 2)$. Determine el lugar geométrico de los puntos $C(\alpha, \beta)$ con $\alpha > 0$, tales que: Si d_1 es la distancia de B al punto medio del trazo AC y d_2 es la distancia de A al punto medio medio del trazo BC, entonces $d_1^2 + d_2^2 = 5A$, con A el área del triángulo ABC.

P6 **[Propuesto]** Determine la circunferencia que pasa por los puntos $A(7, 5)$, $B(2, 0)$ y $C(-1, 9)$

Def (Ejes coordenados)**.** Se definen los ejes OX y OY de la siguiente forma:

$$OX = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \wedge y = 0\}$$
$$OY = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

Def (Lugar geométrico)**.** Es un conjunto de puntos que satisfacen una condición dada.

Def (Distancia entre puntos)**.** Dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, entonces la distancia entre P_1 y P_2 estará dada por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Def (Circunferencia)**.** Definimos la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro $A = (x_0, y_0)$ y radio r como el lugar geométrico de todos los puntos tales que su distancia a A es exactamente r, es decir:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(A, (x, y)) = r\}$$

Usando la fórmula para distancia, obtenemos que:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$

Def. Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son puntos distintos, se define la recta $\mathcal{L}_{AB}$ como el l.g:

$$\mathcal{L}_{AB} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)\}$$

Teorema (Ecuación general de la recta)**.** *Si $a^2 + b^2 \neq 0$, entonces*

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$$

Es una recta

Def (Pendiente de una recta)**.** Sea una recta $\mathcal{L}$ no vertical, con dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ distintos en ella, definimos la pendiente de $\mathcal{L}$ como el real $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Def (Ecuación de la recta, punto pendiente)**.**

$$\mathcal{L} : (y - y_0) = m(x - x_0)$$

Def (Ecuación de la recta dados dos puntos)**.**

$$\mathcal{L} : (y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Def (Ecuación principal de la recta)**.**

$$\mathcal{L} : y = mx + n$$

Donde m es la pendiente y n el coeficiente de posición

Def (Simetral)**.** Dados dos puntos P, Q distintos, definimos la simetral entre ambos como la recta:

$$\mathcal{L} : d(P, (x, y)) = d(Q, (x, y))$$

Def (Paralelismo)**.** Dos rectas L y L' son paralelas si $L = L'$, o bien $L \cap L' = \emptyset$

Def (Perpendicularidad)**.** Dos rectas L y L' son perpendiculares ssi para todo par de puntos distintos $P, Q \in L$, la simetral entre P y Q es paralela a L'

Prop 1. *La simetral entre P y Q pasa por el punto medio entre P y Q y es perpendicular al segmento que los une.*

Prop 2 (Caracterización por pendientes)**.** *Sean L y L' dos rectas no verticales, entonces son paralelas si, y solo si, tienen la misma pendiente, y son perpendiculares si, y solo si, el producto de sus pendientes es -1*