FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1001-1 Introducción al Cálculo
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Pauta Auxiliar 1

P1 Usando los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre las siguientes reglas de signos:

a) $\forall a \in \mathbb{R},\ -(-a) = a$

b) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \cdot (-b) = -ab$

c) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (-a) \cdot (-b) = ab$

Sol. *a*) Queremos probar que el opuesto de $(-a)$ es a, es decir, queremos verificar la igualdad:

$$(-a) + a = 0$$

Lo que es directo, pues:

$$\begin{aligned} (-a) + a &= a + (-a) && (A1) \\ &= 0 && (A5) \end{aligned}$$

b) Queremos probar que el opuesto de ab es $a \cdot (-b)$, es decir:

$$ab + a \cdot (-b) = 0$$

Para ello, notemos que:

$$\begin{aligned} ab + a \cdot (-b) &= a(b + (-b)) && (A3) \\ &= a \cdot 0 && (A5) \\ &= 0 && (Prop) \end{aligned}$$

Como usamos una propiedad que no es hipótesis del problema, debemos demostrarla:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot (0 + 0) && (A4) \\ &= a \cdot 0 + a \cdot 0 && (A3) \end{aligned}$$

Luego $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$, sumando el término $-a \cdot 0$ a ambos lados de esta igualdad, obtenemos que

$$\begin{aligned} &\implies a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) && \\ &\implies a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) && (A2) \\ &\implies 0 = a \cdot 0 + 0 && (A5) \\ &\implies 0 = a \cdot 0 && (A4) \end{aligned}$$

Probando así la propiedad pendiente.

c) Podemos utilizar las partes anteriores, partimos del lado izquierdo:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= -a \cdot (-b) && (P1.b) \\ &= -(-b) \cdot a && (A1) \\ &= -(-ba) && (P1.b) \\ &= ba && (P1.a) \\ &= ab && (A1) \end{aligned}$$

P2 Usando los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre las siguientes identidades:

a) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \dfrac{1+a}{a} = a^{-1} + 1$

b) $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \dfrac{b}{a} - \dfrac{a}{b} = (a+b)(a^{-1} - b^{-1})$

c) $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ a(b^{-1}) = (a^{-1}b)^{-1}$

Sol. *a*) Comenzamos desarrollando el lado derecho,

$$
\begin{aligned}
(a+b)\cdot(a^{-1}-b^{-1}) &= (a+b)(a^{-1}+(-b^{-1})) && (Def.\,Dif)\\
&= a\cdot(a^{-1}+(-b^{-1})) + b(a^{-1}+(-b^{-1})) && (A3)\\
&= (aa^{-1}+a(-b^{-1})) + (ba^{-1}+b(-b^{-1})) && (A3)\\
&= (aa^{-1}+(-ab^{-1})) + (ba^{-1}+(-bb^{-1})) && (P1.b)\\
&= (1+(-ab^{-1})) + (ba^{-1}+(-1)) && (A4)\\
&= ((-ab^{-1})+1) + (ba^{-1}+(-1)) && (A1)\\
&= (-ab^{-1}) + (1+(ba^{-1}+(-1))) && (A2)\\
&= (-ab^{-1}) + ((1+ba^{-1})+(-1)) && (A2)\\
&= (-ab^{-1}) + ((ba^{-1}+1)+(-1)) && (A1)\\
&= (-ab^{-1}) + (ba^{-1}+(1+(-1))) && (A2)\\
&= (-ab^{-1}) + (ba^{-1}+0) && (A5)\\
&= (-ab^{-1}) + ba^{-1} && (A4)\\
&= ba^{-1} + (-ab^{-1}) && (A1)\\
&= ba^{-1} - ab^{-1} && (Def.\,Dif)\\
&= \frac{b}{a} - \frac{a}{b} && (Def.\,Cuoc)
\end{aligned}
$$

b) Queremos probar que el recíproco de $a^{-1}b$ es ab^{-1}, es decir:

$$(a^{-1}b)(ab^{-1}) = 1$$

Para ello basta desarrollar el lado izquierdo de la igualdad:

$$
\begin{aligned}
(a^{-1}b)(ab^{-1}) &= a^{-1}(b(ab^{-1})) && (A2)\\
&= a^{-1}((ba)b^{-1}) && (A2)\\
&= a^{-1}((ab)b^{-1}) && (A1)\\
&= a^{-1}(a(bb^{-1})) && (A2)\\
&= a^{-1}(a\cdot 1) && (A5)\\
&= a^{-1}a && (A4)\\
&= aa^{-1} && (A1)\\
&= 1 && (A5)
\end{aligned}
$$

P3 Usando las propiedades básicas de los números reales, demuestre las siguientes implicancias:

a) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ -a = -b \implies a = b$

b) $\forall a \in \mathbb{R},\ a^3 = 0 \implies a = 0$

Sol. *a*) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $-a = -b$, podemos multiplicar por (-1) a ambos lados de la igualdad para obtener que:

$$(-a)(-1) = (-b)(-1)$$

Luego, por lo demostrado en la P1.(c), se obtiene que:

$$a \cdot 1 = b \cdot 1$$

Lo cual permite concluir que $a = b$ en virtud del Axioma 4.

b) Si $a^3 = 0$, entonces por definición de potencia obtenemos que $a^2 \cdot a = 0$, luego por la Propiedad 5 del apunte, se obtiene que:

$$a^2 = 0 \quad \vee \quad a = 0$$

Si $a = 0$, entonces concluimos directamente lo pedido, así que supongamos que $a^2 = 0$. Por definición de potencia, se obtiene que $a \cdot a = 0$, y nuevamente por la propiedad 5 concluimos que:

$$a = 0 \quad \vee \quad a = 0$$

Por idempotencia del $\vee$, se concluye que $a = 0$

P4 Utilizando exclusivamente los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre la siguiente igualdad:

$$\frac{4}{2} = 2$$

Sol. Comenzamos desarrollando el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{2} &= 4 \cdot 2^{-1} && (Def.\, Cuoc) \\
&= (3+1) \cdot 2^{-1} && (Def.\, de\, 4) \\
&= ((2+1)+1) \cdot 2^{-1} && (Def.\, de\, 3) \\
&= (2+(1+1)) \cdot 2^{-1} && (A2) \\
&= (2+2) \cdot 2^{-1} && (Def.\, de\, 2) \\
&= 2 \cdot 2^{-1} + 2 \cdot 2^{-1} && (A3) \\
&= 1 + 1 && (A5) \\
&= 2 && (Def.\, de\, 2)
\end{aligned}$$