Auxiliar Pre Control 3

Procesos de Poisson y CMTC

Profesores: Susana Mondschein y Denis Sauré
Auxiliares: D. Kauer, J. Guzman, I. Alarcón., F. del Solar,
D. Moreno, A. Ferrada, P. Maldonado, D. Guevara

Pregunta 1

Una sucursal del Banco Falabeli tiene un aforo de K clientes. A esta sucursal llegan clientes durante todo el día, estos llegan según una distribución exponencial de media $1/\lambda$. El tiempo de atención tiene una tasa de $1/\mu$. Además, solo hay un ejecutivo disponible.

1. Modele esto como una CMTC, mostrando los distintos estados, tasas de transición y la matriz de intensidades.

Tabla 1: Matriz Q

-λ	λ	0	0	$\dots$	0	λ
μ	-$(\lambda+\mu)$	λ	0	$\dots$	0	μ
0	μ	-$(\lambda+\mu)$	λ	$\dots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	0	μ	$-(\lambda+\mu)$	λ
0	0	$\dots$	0	0	μ	-μ

2. Encuentre las probabilidades estacionarias y determine que fracción del tiempo que el aforo del local está completo.

   El vector de probabilidades estacionarías π es el siguiente,

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \dots & \pi_{k-1} & \pi_k \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Además se tiene que

$$\pi Q = 0 \tag{2}$$

   y que,

$$\sum_{i=0}^{k} \pi_i = 1 \tag{3}$$

   usando la matriz de transición y (2) se tiene que,

$$-\lambda \cdot \pi_o + \mu \cdot \pi_1 = 0 \tag{4}$$

$$\lambda \cdot \pi_0 - (\lambda + \mu) \cdot \pi_1 + \mu \cdot \pi_2 = 0 \tag{5}$$

$$\vdots$$

$$\lambda \cdot \pi_{k-2} - (\lambda + \mu) \cdot \pi_{k-1} + \mu \cdot \pi_k = 0 \tag{6}$$

$$\lambda \cdot \pi_{k-1} - \mu \cdot \pi_k = 0 \tag{7}$$

Luego desarrollando se tiene que,

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \pi_0 \tag{8}$$

$$\pi_2 = -\frac{\lambda}{\mu} \cdot \pi_0 + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \cdot \pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot \pi_0 \tag{9}$$

se puede ver que,

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \pi_0 \tag{10}$$

Luego utilizando (3) y (10) se tiene que,

$$\sum_{i=0}^{k} \pi_i = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \pi_0 = 1 \tag{11}$$

Al despejar el lado derecho de la ecuación obtenemos que,

$$\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = \frac{1}{\pi_0} \tag{12}$$

obteniendo finalmente,

$$\pi_o = \frac{1}{\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} = \frac{\frac{\lambda}{\mu} - 1}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} - 1} \tag{13}$$

El gerente de la sucursal se dio cuenta de que con un ejecutivo no era suficiente, por lo que contrató a otro ejecutivo, aumentando el aforo de la oficina a 2K, siendo k el aforo para cada ejecutivo, priorizando siempre la atención de los clientes por parte del primer ejecutivo, es decir, si el ejecutivo 1 aún no cumple con su aforo los clientes van a ser atendidos por él.

3. Realice 1. con las nuevas condiciones.

   Para esto vamos a clasificar a cada estado como una tupla, en dónde el primer valor será el aforo utilizado del primer ejecutivo y el segundo valor será el aforo utilizado por el segundo ejecutivo.

   Es importante notar que cambia la matriz de transición completa, ya que, por ejemplo, se podría pasar desde $q_{(k,1)}$ a $q_{(k-1,1)}$ y luego pasar de $q_{(k-1,1)}$ a $q_{(k-1,0)}$, afectando entonces a un estado que se daba antes de tener a ambos ejecutivos.

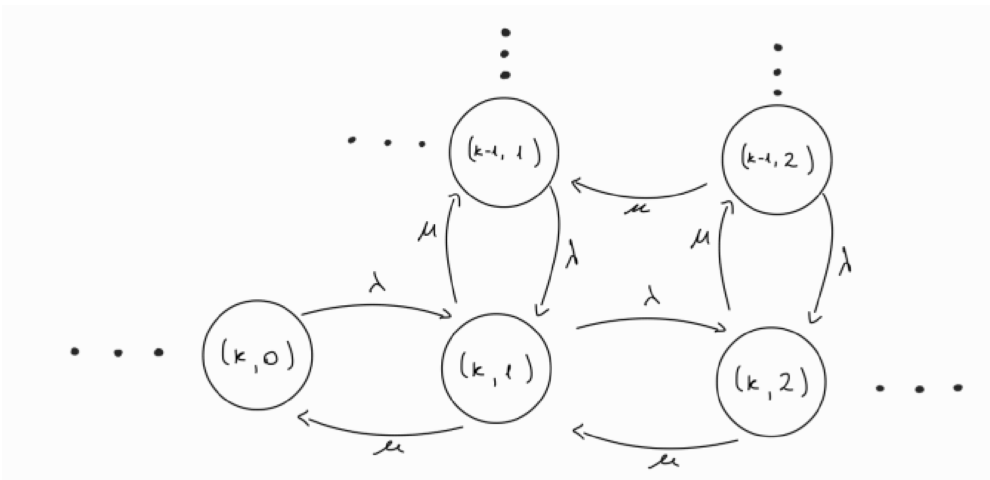

Figura 1: Ejemplo de CMTC resumido. (incompleto)

   Como se puede ver en la figura realizar un diagrama para una cadena como está es complejo por lo que se realiza un modelamiento basado en condiciones. Sea X el ejecutivo 1 e Y el ejecutivo 2, las tasas entre tuplas (estados) son,

   Para X < K, para todo Y, la tasa de llegada es,

$$(X,Y) \xrightarrow{\lambda} (X+1,Y)$$

   Para X = K, para Y < K, la tasa de llegada es,

$$(X,Y) \xrightarrow{\lambda} (X,Y+1)$$

   Para 0<X≤K, para todo Y, la tasa de salida es,

$$(X,Y) \xrightarrow{\mu} (X-1,Y)$$

   Para todo X, para 0<Y≤K, la tasa de salida es,

$$(X,Y) \xrightarrow{\mu} (X,Y-1)$$

   Incluyendo además la naturaleza de las variables,

   $X \in [0,k]$
   $Y \in [0,k]$

Luego tenemos que la trancisión para un estado se puede calcular con las reglas anteriores, en dónde podemos trabajar con ciertas reglas al igual que en la parte anterior,

Para k>X>0, para k>Y>0,

$$(2\mu + \lambda)\pi_{(i,j)} = \mu\pi_{(i+1,j)} + \lambda\pi_{(i-1,j)} + \mu\pi_{(i,j+1)} \tag{14}$$

Para k>X>0, para Y=0,

$$(\lambda + \mu)\pi_{(i,0)} = \lambda\pi_{(i-1,0)} + \mu\pi_{(i+1,0)} + \mu\pi_{(i,1)} \tag{15}$$

Para X=0, para k>Y>0,

$$(\lambda + \mu)\pi_{(0,j)} = \mu\pi_{(1,j)} + \mu\pi_{(0,j+1)} \tag{16}$$

Para X=k, para k>Y>0,

$$(2\mu + \lambda)\pi_{(k,j)} = \lambda\pi_{(k-1,j)} + \mu\pi_{(k,j+1)} + \lambda\pi_{(k,j-1)} \tag{17}$$

Para k>X>0, para Y=k,

$$(2\mu + \lambda)\pi_{(i,k)} = \lambda\pi_{(i-1,k)} + \mu\pi_{(i+1,k)} \tag{18}$$

Para X=0, para Y=0,

$$\lambda\pi_{(0,0)} = \mu\pi_{(1,0)} + \mu\pi_{(0,1)} \tag{19}$$

Para X=k, para Y=k,

$$2\mu\pi_{(k,k)} = \lambda\pi_{(k-1,k)} + \lambda\pi_{(k,k-1)} \tag{20}$$

Para X=k, para Y=0

$$(\lambda + \mu)\pi_{(k,0)} = \mu\pi_{(k,1)} + \lambda\pi_{(k-1,0)} \tag{21}$$

Para X=0, para Y=k

$$\lambda\pi_{(0,k)} = \mu\pi_{(1,k)} \tag{22}$$

Para llegar a estos resultados es recomendable realizar el diagrama de la cadena de markov de la zona correspondiente a las restricciones de X e Y. También se debe tener en cuenta la relación de " conservación de flujo", es decir, que el flujo fuera y dentro de un estado son iguales (recordar que las probabilidades estacionarias son las que producen este balance). Es importante además verificar que se tomen todos los casos posibles una sola vez, en este caso cada tupla.

4. Usted llega después de un largo tiempo al Banco Falabeli, ¿Cuál es la probabilidad de que el primer ejecutivo lo reciba a usted mientras que el segundo ejecutivo está atendiendo a otro(s) cliente(s)?

$$\mathbb{P} = \pi_{0,1} + \pi_{0,2} + \pi_{0,3} + ... + \pi_{0,k-1} + \pi_{0,k} + \pi_{1,1} + \pi_{1,2} + ... + \pi_{1,k} + \pi_{2,1} + \pi_{2,2} + ... + \pi_{k-1,k} \quad (23)$$

Esto expresado mediante sumatorias es equivalente a,

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{k} \pi_{i,j} \quad (24)$$

Pregunta 2

Sofía es una joven muy trabajadora y ha decidido empezar a ahorrar para sus vacaciones de verano, para ello ha conseguido un trabajo de recolectar data sobre la cantidad de personas que pasan por el Parque O´higgins. Luego de unos días de haber empezado, Sofía (que cursó el ramo de Decisiones Bajo Incertidumbre), notó que cada grupo de personas llegan según un proceso de Poisson de tasa 20 grupos/hora, en donde además, el 60 % de está compuesto por una sola persona, el 30 % por parejas de personas y el 10 % por grupos de 3. Sofía comienza a trabajar a las 8:00 am.

1. Si se define P(t) como el "número de personas que llegan en un instante t", ¿es este un proceso de Poisson? Justifique

   R: P(t) no es proceso de Poisson, puesto que los incrementos no son unitarios, con probabilidad 60 % sólo llega una persona pero con probabilidad 30 % llegan 2 y con probabilidad 10 % llegan 3.

2. ¿Cual es la probabilidad de que Sofia hable con sólo 4 personas en la próxima media hora?

   R: Si Sofia solo habla con 4 personas en la próxima media hora significa que pasarán alguno de los siguientes:

   - Habla con 4 grupos de una persona
   - Habla con 3 grupos, uno de 2 personas y 2 de una persona
   - Habla con 2 grupos de 2 personas
   - Habla con 2 grupos, uno de 3 personas y otro de una persona

   Además, se definen los siguientes procesos de Poisson:

   - P(t): cantidad de personas que han llegado hasta un instante t
   - G(t): cantidad de grupos que han llegado hasta un instante t
   - G_i(t): cantidad de grupos de i personas que han llegado hasta un instante t. i∈{1,2,3}

   Dado que P(t) no es un proceso de Poisson, podemos notar que se pude encontrar eventos equiprobables que si lo son. De esta forma (suponiendo t=0):

$$P(P(1/2) = 4) =$$

$\mathrm{P}(\mathrm{G}_1(1/2) = 4|G(1/2) = 4) \cdot P(G(1/2) = 4) +$

$\mathrm{P}(\mathrm{G}_2(1/2) = 2|G(1/2) = 2) \cdot P(G(1/2) = 2) +$

$\mathrm{P}((\mathrm{G}_1(1/2) = 2) \cap (G_2(1/2) = 1)|G(1/2) = 3) \cdot P(G(1/2) = 3) +$

$\mathrm{P}((\mathrm{G}_3(1/2) = 1) \cap (G_1(1/2) = 1)|G(1/2) = 2) \cdot P(G(1/2) = 2)$

Resolvemos:

Sea "$1G_1+1G_3$" la abreviatura de $(G_3(1/2)=1)\cap(G_1(1/2)=1)|G(1/2)=2)$:

$$P(1G_1+1G_3)=\frac{P(((G_3(1/2)=1)\cap(G_1(1/2)=1))\cap(G(1/2)=2))}{P(G(1/2)=2)}$$
$$P(1G_1+1G_3)=\frac{P(((G_3(1/2)=1)\cap(G_1(1/2)=1))\cap(G_2(1/2)=0))}{P(G(1/2)=2)}$$
$$P(1G_1+1G_3)=\frac{P(G_3(t+1/2)=1)\cdot P(G_1(1/2)=1)\cdot P(G_2(1/2)=0)}{P(G(1/2)=2)}$$
$$P(1G_1+1G_3)=\binom{2}{1}(\frac{\lambda_3}{\lambda})^1(\frac{\lambda_1}{\lambda})^1$$

Análogo para el resto, con lo que se llega a:

$$P(P(1/2)=4)=\binom{4}{4}(\frac{\lambda_1}{\lambda})^4\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^4}{4!}+\binom{2}{2}(\frac{\lambda_2}{\lambda})^2\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^2}{2!}+\binom{3}{2}(\frac{\lambda_1}{\lambda})^2(\frac{\lambda_2}{\lambda})^1\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^3}{3!}+\binom{2}{1}(\frac{\lambda_3}{\lambda})^1(\frac{\lambda_1}{\lambda})^1\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^2}{2!}$$

En donde $\lambda=20\frac{grupos}{hora}\cdot\frac{1}{2}\frac{hora}{mediahora}=10\frac{grupos}{mediahora}$ y los $\lambda_i=\lambda\cdot w_i$, donde w_i es su proporción (por ejemplo, $\lambda_1=\lambda\cdot 0,6=6\frac{grupos}{mediahora}$)

3. Acaba de hablar con Sofía y ella le ha comentado que recién comenzó su descanso de medio día. Además, ella le ha dicho que esta muy cansada pues ha hablado con 100 grupos distintos. ¿Cual es la cantidad esperada de personas con las que habló Sofia?

   R: Podemos identificar que la esperanza de un pedido corresponde a:

   $$E[grupo]=0,6\cdot 1+0,3\cdot 2+0,1\cdot 3=1,5$$

   Por lo tanto, la cantidad de gente esperada con quien Sofia habló es de:

   $$E[100grupos]=100\cdot E[grupo]=100\cdot(0,6\cdot 1+0,3\cdot 2+0,1\cdot 3)=150$$

4. Durante la tarde, Sofia va a comprar un snack, lo cual le tomará un tiempo exponencial con media 5 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que alcance a comprar su snack antes de que llegue un grupo?

   R: Podemos identificar que tanto el tiempo entre grupos como el tiempo en que Sofía va a comprar su snack distribuyen exponencial de la siguiente manera:

   - Tiempo que se demoran los grupos en llegar ~ Exp ($20\ \frac{grupos}{hora}$)
   - Tiempo que Sofia tarda en comprar su snack ~ Exp ($\frac{1}{5}\frac{snacks}{minuto}$) = Exp ($12\ \frac{snacks}{hora}$)
     Como se quiere saber el minimo entre 2 variables que distribuyen exponencial, se obtiene que la probabilidad que se busca viene dada por una carrera de exponenciales, por lo que la probabilidad de que compre su snack antes de que llegue un grupo es de:

     $$\frac{12}{32}$$