Auxiliar 12

IN3221 - Teoría de Juegos y Estrategia.

Profesora: Sofía Correa.
Auxiliares: Ignacio Alarcón, Rienzi Roldán, Trinidad Ulloa.

Selección adversa:

Se da cuando existe asimetría de información, ejemplos trabajadores y sus capacidades y vendedores de artículos de segunda mano.

Mercado de Limones:

Existe 2 calidades de un producto (baja y alta calidad), donde los dueños están dispuesto a vender por un precio mínimo p_l y p_h respectivamente. Existen disponibilidades a pagar o_l y o_h, en el caso en que el comprador sepa con certeza la calidad del producto (generalmente $o_l > p_l$ y $o_h > p_h$).

¿Problema?

El comprador no sabe cual es la calidad del producto, esta información la conoce solamente el vendedor. Por lo que se establece un único precio en el mercado para ambos tipos de calidades.

Condiciones de compra y venta:

1. Compra: $o_h \cdot f_h + o_l \cdot (1 - f_h) \geq p$
2. Venta naranjas: $p \geq p_h$
3. Venta limones: $p \geq p_l$

Condiciones para todos:

$o_h \cdot f_h + o_l \cdot (1 - f_h) \geq p \geq p_h$

En caso de que esta desigualdad no se cumpla, ocurre la selección adversa, porque no habrían productos de buena calidad (naranjas) en el mercado.

Riesgo moral vs Selección adversa:

En ambos casos existe información asimétrica, pero la diferencia es que en el riesgo moral, la asimetría es con respecto a las acciones que pueden tomar los jugadores, mientras que en la selección adversa, una de las partes tiene más información acerca de su tipo de calidad.

P1 Mantenciones

Bruna´s Ltda, es una reconocida empresa de mantenimiento de artículos de refrigeración, en donde se incurre en un costo $c(t) = 4t$, con t el tiempo en horas que se destina a cada trabajo.

Se sabe que la empresa cuenta con dos tipos de clientes, quienes valoran de manera diferente el nivel de servicio que se les entrega. Las valoraciones se muestran a continuación:

$$v_h = n\sqrt{t}$$
$$v_l = m\sqrt{t}$$

Con $n > m$ y t el tiempo en horas que se le dedicó al trabajo.

1. Considerando el caso en que Bruna´s puede diferenciar entre sus tipos de clientes, plantee el problema que debe resolver para cada uno de ellos y encuentre los precios y tiempos óptimos a destinar.
2. ¿Es este un problema de selección adversa?
3. Realice nuevamente la parte 1, pero ahora teniendo en cuenta que la empresa no puede distinguir entre clientes, pero se conoce que la fracción de clientes de valoración alta es f_h.
4. ¿Es este un problema de selección adversa?

1) Calculamos las utlidades de cada tipo de cliente

$$U_h = n\sqrt{t} - p_h$$
$$U_l = m\sqrt{t} - p_l$$

Planteamos el problema que enfrenta Bruna´s Ltda, como en esta parte, puede diferenciar entre clientes, la empresa realiza 2 problemas de maximización:

Para tipo h:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & p_h - 4t \\ \text{sujeto a} \quad & n\sqrt{t} - p_h \geq 0 \end{aligned}$$

Para resolver este problema, se ocupa el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = p_h - 4t - \lambda_1(n\sqrt{t} - p_h)$$

Ocupamos CPO, por lo que nos quedan 3 ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_h} = 0$$

De la cual se obtiene:

$$\lambda_1 = -1 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0$$

Despejando se obtiene:

$$n\sqrt{t} = p_h \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

De la cual se obtiene:

$$\frac{\lambda_1 n}{2\sqrt{t}} = -4 \tag{3}$$

Reemplazando lo encontrado en (1) y (2) en (3), se tiene que:

$$t = (\frac{n}{8})^2$$

Finalmente, reemplazando esta igualdad en la ecuación (2) y despejando p_h queda:

$$p_h = \frac{n^2}{8}$$

Por lo que, el óptimo es $(p_h, t) = (\frac{n^2}{8}, (\frac{n}{8})^2)$.

El desarrollo es análogo para el otro cliente, por lo que se obtiene: $(p_l, t) = (\frac{m^2}{8}, (\frac{m}{8})^2)$

2) No, porque se puede diferenciar entre los tipos de clientes

3) Ahora como no se puede diferenciar entre clientes, la empresa se enfrenta ahora a un único problema de optimización, en donde la función a maximizar es la utilidad esperada de la empresa.

$$\begin{array}{rl}
\text{Maximizar} & f_h(p_h - 4t_h) + (1 - f_h)(p_l - t_l) \\
\text{RP1} & n\sqrt{t_h} - p_h \geq 0 \\
\text{RP2} & m\sqrt{t_l} - p_l \geq 0 \\
\text{RI1} & n\sqrt{t_h} - p_h \geq n\sqrt{t_l} - p_l \\
\text{RI2} & m\sqrt{t_l} - p_l \geq m\sqrt{t_h} - p_h
\end{array}$$

Para resolver este problema de optimización, se puede hacer el lagrangiano, pero antes vamos a simplificar un poco, debido a que tenemos restricciones que son redundantes.

Partimos demostrando que con las restricciones RP2 y RI1, implica la restricción RP1.

Por RI1, se tiene que:

$$n\sqrt{t_h} - p_h \geq n\sqrt{t_l} - p_l$$

Sumamos p_h a ambos lados:

$$n\sqrt{t_h} \geq n\sqrt{t_l} + p_h - p_l \tag{4}$$

Por la restricción RP2, se tiene que:

$$m\sqrt{t_l} - p_l \geq 0$$

Como $n > m$, entonces:

$$n\sqrt{t_l} - p_l \geq m\sqrt{t_l} - p_l \geq 0$$

$$n\sqrt{t_l} - p_l \geq 0 \tag{5}$$

Ahora juntando (4) y (5), se tiene que:

$$n\sqrt{t_h} \geq p_h$$
$$n\sqrt{t_h} - p_h \geq 0$$

En consecuencia, si se cumple la restricciones RP2 y RI1, se cumple la restricción RP1, por lo que es redundante agregar esta última restricción al problema.

Por otro lado, para que se cumpla RI1 y RI2, entonces se tiene la implicancia de que $p_h \geq p_l$ y $t_h \geq t_l$, en consecuencia $\sqrt{t_h} \geq \sqrt{t_l}$

Además, necesitamos que la restricción RI1 se cumpla, porque en caso de no cumplirse, los clientes que están dispuestos a pagar más p_h se van a desviar y pagarán p_l, lo que no conviene. Pero si se cumple la desigualdad estricta, quiere decir que aún podemos cobrar un mayor precio sin que se cambien de servicio (se asume que en el caso de que se cumple con igualdad no se desvían), en consecuencia nos conviene que RI1 se cumpla con igualdad, lo cuál cuando sucede, implica la restricción RI2, por lo que esta última queda redundante y la podemos eliminar.

Así el problema que se enfrenta la empresa queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & f_h(p_h - 4t_h) + (1 - f_h)(p_l - t_l) \\ \text{RP2} \quad & m\sqrt{t_l} - p_l \geq 0 \\ \text{RI1} \quad & n\sqrt{t_h} - p_h \geq n\sqrt{t_l} - p_l \end{aligned}$$

Ahora desarrollamos el lagrangiano, por lo que nos queda

$$L = f_h(p_h - 4t_h) + (1 - f_h)(p_l - t_l) - \lambda_1(m\sqrt{t_l} - p_l) - \lambda_2(n\sqrt{t_h} - p_h - n\sqrt{t_l} + p_l)$$

Aplicamos CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_h} = 0$$

De la cual se obtiene:

$$\lambda_2 = -f_h \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_l} = 0$$

De la cual se obtiene:

$$\lambda_1 = -1 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_h} = 0$$

De la cual se obtiene al reemplazar los valores conocidos:

$$t_h = (\frac{n}{8})^2 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_l} = 0$$

De la cual se obtiene al reemplazar los valores conocidos:

$$t_l = (\frac{m - nf_h}{8 - 8f_h})^2 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0$$

De la cual se obtiene al reemplazar los valores conocidos:

$$p_l = m\frac{m - nf_h}{8 - 8f_h} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0$$

De la cual se obtiene al reemplazar los valores conocidos:

$$p_h = m\frac{m - nf_h}{8 - 8f_h} + n(\frac{n}{8} - \frac{m - nf_h}{8 - 8f_h}) \tag{11}$$

4) Este problema es un caso de selección adversa, ya que existen dos tipos de clientes y la empresa no puede distinguir entre ellos.

P2 Cruzados

Cruzados SADP es una empresa creada para hacerse cargo de los intereses económicos y financieros de la rama de fútbol del Club Deportivo Universidad Católica.

Dicha firma es la responsable de realizar las contrataciones de jugadores para el plantel.

Lamentablemente en los últimos años han tenido un paupérrimo desempeño en esta labor, es por esto que se le encomienda a usted cómo el encargado de llevar a cabo las contrataciones.

Usted decide implementar una política de contratación de talentos jóvenes y sabe que en el mercado hay jugadores de alto y bajo potencial. La función de utilidades de los que tienen alto potencial es $w - \alpha^2$.

Mientras que los que tienen bajo potencial es $w - 2\alpha^2$, donde w es el salario y e las horas de entrenamiento. Teniendo en cuenta qué el p porciento de los jugadores en el mercado tienen un alto potencial.

Finalmente, la utilidad para el club deportivo es de $B\alpha$, con $B > 1$

A) Plantee y resuelva el problema, para el caso en que usted sepa discernir entre jugadores con alto y bajo potencial

B) Plantee el problema cuando se presenta selección adversa, ¿Cómo cambia el problema? y ¿Por qué?

C) Resuelva el problema planteado en B y compare con el resultado de A

D) Considere ahora que usted es un fanático acérrimo del club, por lo que decide sólo fichar jugadores con alto potencial. Planteé y resuelva este nuevo problema **[Propuesto]**

a) Debido a que sabemos discernir, podemos plantear 2 problemas de optimización y resolverlos por separados, de tal manera, queda que para los jugadores de desempeño alto, se tiene el siguiente problema para los jugadores de alto rendimiento:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & B\alpha_a - w_a \\ \text{s.a} \quad & w_a - \alpha^2 \geq 0 \end{aligned}$$

En donde se debe calcular el lagrangiano y luego aplicar CPO para poder encontrar la solución.

$$L = B\alpha_a - w_a - \lambda(w_a - \alpha^2)$$

Al aplicar CPO, se obtienen 3 ecuaciones, en primer lugar:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_a} = 0$$

De la cual se despeja:

$$\lambda_1 = -1 \tag{12}$$

La segunda derivada parcial es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

De la cual se despeja:

$$\alpha^2 = w_a \tag{13}$$

La tercera derivada parcial es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_a} = 0$$

En donde ocupamos el valor de λ obtenido anteriormente:

$$\alpha_a = \frac{B}{2} \tag{14}$$

Ahora reemplazando el valor de α_a en la ecuación 13, se despeja el valor de $w_a = (\frac{B}{2})^2$.

Ahora para los jugadores de bajo potencial, el procedimiento es análogo y se llega a que $w_b = \frac{B^2}{8}$ y $\alpha_b = \frac{B}{4}$.

B) Ahora con selección adversa el problema cambia porque no es posible discernir entre los tipos de jugadores, así que se debe juntar las funciones objetivos y las restricciones deben ser talque a los jugadores les convenga ser contratados y para el club, poder separar entre jugadores con alto y bajo potencial (esto se hace con las restricciones de no desplazamiento unilateral, que son las últimas 2 restricciones que se colocarán a continuación):

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & p(B\alpha_a - w_a) + (1-p)(B\alpha_b - w_b) \\ \text{RP1} \quad & w_a - \alpha_a^2 \geq 0 \\ \text{RP2} \quad & w_b - 2\alpha_b^2 \geq 0 \\ \text{RI1} \quad & w_a - \alpha_a^2 \geq w_b - \alpha_b^2 \\ \text{RI2} \quad & w_b - 2\alpha_b^2 \geq w_a - 2\alpha_a^2 \end{aligned}$$

Al igual que en el problema de la P1, se puede hacer una reducción de las restricciones (reduciremos las mismas restricciones), acá también se tiene que RP2 y RI1 implican RP1 (desarrollo es análogo al de la P1), mientras que la restricción RI2 se puede omitir, debido a que igual que en la pregunta anterior, se llegará a que $\alpha_a > \alpha_b$, por lo que no es un inconveniente que los jugadores de bajo rendimiento les convenga ser de un alto rendimiento, porque de alguna manera, al transformarse en alto rendimiento le darán una mayor utilidad a Cruzados.

Por lo que el problema reducido nos queda:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & p(B\alpha_a - w_a) + (1-p)(B\alpha_b - w_b) \\ \text{RP2} \quad & w_b - 2\alpha_b^2 \geq 0 \\ \text{RI1} \quad & w_a - \alpha_a^2 \geq w_b - \alpha_b^2 \end{aligned}$$

Al calcular el lagrangiano se tiene:

$$L = p(B\alpha_a - w_a) + (1-p)(B\alpha_b - w_b) - \lambda_1(w_b - 2\alpha_b^2) - \lambda_2(w_a - \alpha_a^2 - w_b + \alpha_b^2)$$

Al aplicar CPO, se tienen 6 ecuaciones, partiendo por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_a} = 0$$

De la cual se despeja:

$$\lambda_2 = -p \tag{15}$$

Luego, derivando por $_b$ se despeja:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_b} = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \tag{16}$$

Siguiendo con:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_a} = 0$$

Y reemplazando el valor obtenido para λ_2, nos queda:

$$\alpha_a = \frac{B}{2}$$

Luego, continuando con:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_b} = 0$$

Al derivar y reemplazar los valores obtenidos para λ_1 y λ_2, nos queda:

$$\alpha_b = \frac{B(1-p)}{2(2-p)}$$

Ahora solo nos falta calcular w_a y w_b, para esto aplicamos las derivadas parciales que nos faltan (λ_1 y λ_2).

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0$$

Nos queda que se debe cumplir con igualdad la restricción RP2, es decir:

$$w_b = 2\alpha_b^2 = 2(\frac{B(1-p)}{2(2-p)})^2 \tag{17}$$

Finalmente, derivamos con respecto a λ_2, reemplazamos los valores obtenidos para w_b, α_a y α_b, teniendo finalmente:

$$w_a = \frac{B}{2} + (\frac{B(1-p)}{2(2-p)})^2 - (\frac{B(1-p)}{(2-p)})^2 \frac{1}{2}$$

Mencionar que en todo problema en donde no se pueda diferenciar los tipos de clientes, obtendremos una utilidad menor o igual al caso en que si podamos diferenciar.

P3 Venta automotriz

La venta de autos usados llegó a su peak durante la pandemia, principalmente debido a la escasa oferta de autos nuevos.

Unos de los inconvenientes más usuales dentro de esta industria es acordar el precio del vehículo. Para simular esto supondremos que un vendedor y un comprador negocian el precio de un coche de segunda mano. El vendedor cree que el comprador valora el coche en 500 dólares, con una probabilidad x y con probabilidad complementaria lo valora en el doble del precio anterior. Mientras que el comprador estima que para el vendedor el valor es de 250 dólares con probabilidad x y con probabilidad complementaria, lo estima en 750 dólares.

Si las valoraciones declaradas son 250 y 500 para el vendedor y comprador respectivamente el precio de intercambio es 500 y si son de 750 y 1000 el precio se fija en 750. Si un dictador especifica que la venta habría de hacerse a un precio p. Cuando el vendedor declare una valoración de 250 dólares y el comprador declare 1.000.

1. Obtenga dos condiciones de p que aseguren que ambas partes declaren con sinceridad
2. Encuentre el valor de x que hace que ambas restricciones por incentivos se satisfagan exactamente como igualdades

1)

Casos posibles, en donde los recuadros muestran el valor al cual se realiza la venta:

Vendedor / Comprador	500, con prob (x)	1000 con prob (1-x)
150, con prob (1- x)	500	p
750 con prob (x)	No hay venta	750

Veamos la condición para no mentir:

$$\pi_{nomentir} \geq \pi_{mentir}$$

i) Para el vendedor se tendrá que cumplir entonces que:

$$(500 - 250)x + (p - 250)(1 - x) \geq (1 - x)(750 - 250)$$

Implica que se debe cumplir:

$$p \geq \frac{750 - 1000x}{1 - x}$$

ii) Para el comprador se debe cumplir que:

$$(1 - x)(1000 - p) + x(1000 - 750) \geq (1 - x)(1000 - 500)$$

Por lo que se debe cumplir:

$$p \leq \frac{500 - 250x}{1 - x}$$

2) Ahora para calcular el valor de x que satisface la igualdad de ambas condiciones que aseguran la sinceridad de ambas partes, solo debemos imponer:

$$\frac{750 - 1000x}{1 - x} = p = \frac{500 - 250x}{1 - x}$$
$$\frac{750 - 1000x}{1 - x} = \frac{500 - 250x}{1 - x}$$
$$750 - 1000x = 500 - 250x$$
$$250 = 750x$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Donde se puede calcular el precio $p = 625$

P4 ¿Selección Adversa o Riesgo Moral?

Lea de las siguientes situaciones, ¿corresponden a un problema de selección adversa o riesgo moral?

1. Una empresa quiere contratar, pero no puede distinguir entre trabajadores esforzados y no esforzados.

   R: Como no puede distinguir entre tipos de personas, es un problema de selección adversa

2. Una empresa debe decidir los sueldos para los empleados, quienes deciden si esforzarse o no esforzarse.

   R: Como acá los empleados son los que deciden, entonces no son tipos de trabajadores diferentes, sino trabajadores que toman decisiones diferentes, en conclusión, es un problema de riesgo moral.

3. Compra y venta de vehículos de segunda mano, en donde se conoce el estado de los autos.

   R: Como se conoce el estado de los autos, se puede diferenciar entre los tipos, no es un problema de selección adversa ni riesgo moral.

4. Compra y venta de vehículos de segunda mano, en donde no se sabe el estado de ellos.

   R: Este es un problema de selección adversa.