Auxiliar 6: Juegos en forma extensiva y Modelo Stackelberg

IN3221 - Teoría de Juegos y Estrategia.

Profesora: Sofía Correa.
Auxiliares: Ignacio Alarcón, Rienzi Roldán, Trinidad Ulloa.

Resumen

Juegos en forma extensiva:.

1. Se arma un árbol.
2. Conjunto de jugadores $i \in \{1, ..., N\}$.
3. En cada nodo se indica quién toma la decisión.
4. De los nodos salen acciones (ramas).
5. Conjunto de información: conjunto de nodos que un jugador no puede distinguir.

Información imperfecta: Ocurre cuando un conjunto de información tiene más de un nodo.
Subjuego:

1. Parte de un sólo nodo.
2. Contiene todos los nodos sucesores del primer nodo.
3. No se pueden separar conjuntos de información.

Equilibrio Perfecto en Subjuegos: Perfil de estrategias que induce en un EN en cada subjuego.
Preposición: En un juego de información perfecta, inducción reversa es equivalente a EPS.

P1

Para las próximas elecciones presidenciales se presentan dos candidatos, quienes deben escoger entre la postura liberal (L) o conservadora (C). Asuma que la forma en que escogen su postura es de manera secuencial, donde el jugador 1 juega primero y no pueden cambiar de posición (el juego tiene 2 períodos).

Tenga en consideración las siguientes resultados de las elecciones:

- Si ambos eligen la misma postura se reparten 5 millones de votos para el primer candidato y 7 millones para el segundo.
- Si escogen posiciones diferentes, J1 recibe 7 millones de votos y J2 recibe 5 millones de votos

Responda las siguientes preguntas:

1. Dibuje el árbol del juego
2. ¿Quién tiene la ventaja?

3. Obtenga los EPS del juego
4. ¿Cómo cambia el resultado, si el segundo candidato debe escoger su postura, sin saber lo que escogió el otro candidato?

a) El árbol de decisiones queda de la siguiente forma:

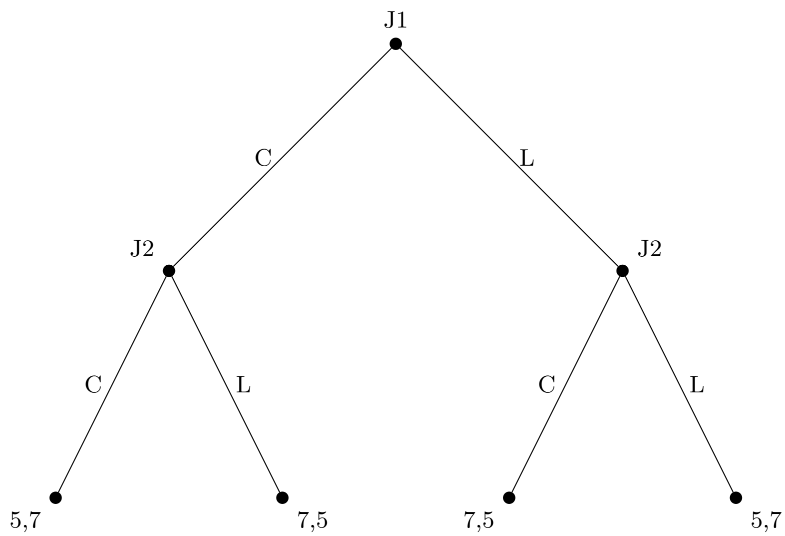


Figura 1: Árbol a)

b) Para ver quién tiene ventaja, se debe resolver el árbol mediante el método de inducción reversa, por lo que se analiza las hojas del árbol anterior, en donde el $J2$ debe escoger dependiendo de lo que haya jugado $J1$ (esto se puede, debido a que estamos en el caso de información perfecta, es decir, al momento de tomar la decisión, $J2$ sabe lo que jugó $J1$):

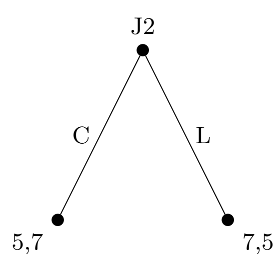


Figura 2: Árbol cuando J1 juega C

Debido a que $J2$ es racional, entonces decidirá jugar C, para obtener una utilidad de 7, mientras que para el caso en que $J1$ elija L, se tiene la siguiente situación para $J2$:

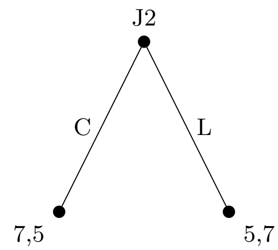


Figura 3: Árbol cuando J1 juega L

Por lo que, $J2$ jugará L, conociendo esto, el $J1$ verá las siguientes utilidades:

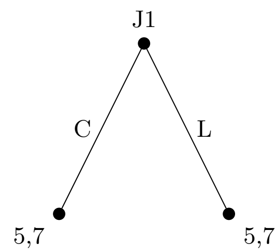


Figura 4: Árbol J1 luego de resolver por inducción reversa

Por lo que, se puede observar que el $J2$ es el que tiene la ventaja, ya que sea lo que elija el primero, se obtendrán los mismos pagos y en este caso es $J2$ quién tiene el poder de elección. A dicha ventaja se le llama ventaja de la información.

c) Para encontrar los EPS, se necesita obtener los EN de cada subjuego, por lo que primero se deben identificar todos los subjuegos.

Existen 3 subjuegos, son los observados en la parte anterior (figura 1, 2 y 3), los cuales ya fueron resueltos mediante la inducción reversa, en caso del subjuego de la figura 2, el EN es C, para el subjuego de la figura 3, el EN es L, por lo que se reemplazan estos subjuegos (las ramas del juego original) por los pagos encontrados en los EN. Por lo que, la figura 1, queda como la figura 4, de donde se nota que el $J1$ es indiferente entre jugar L o C, es decir, no tiene incentivos para desviarse de C a L, en consecuencia, (C,L) y (L,C) son EPS, debido a que son EN en cada subjuego.

d) Con información imperfecta, el árbol queda de la siguiente manera:

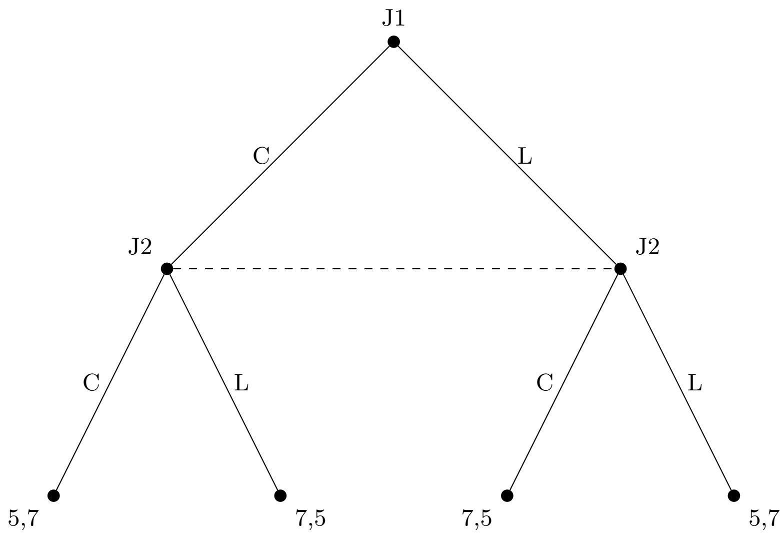


Figura 5: Árbol información perfecta

¿Quién tiene la ventaja?

Notar que se tiene un único subjuego (el juego completo), esto debido a que el segundo jugador elige sin saber lo que escogió el primero, en consecuencia, es análogo a un juego simultáneo, es decir, ningún jugador tiene ventaja (además de la simetría de la matriz de pagos)

Para obtener los EPS, se deben sacar los EN del juego y como en este caso, solo existe un subjuego (el mismo juego), entonces los EN obtenidos serán los EPS del juego.

Construimos la matriz de pagos (porque ahora se resuelve como un juego simultáneo) y queda:

		J2	
		C	L
J1	C	5, 7	7, 5
	L	7, 5	5, 7

Se puede notar que no existe EN en estrategias puras, por lo que buscaremos ENEM, para lo cual asignamos $\sigma = (p, 1-p)$ para J1 (es decir, con probabilidad p juega C y con probabilidad complementaria juega L. Luego aplicamos el criterio de indiferencia para las utildades de J2 y nos queda que:

$$E[U_2(C, \sigma) = E[U_2(L, \sigma)]$$

$$7p + 5(1-p) = 5p + 7(1-p)$$

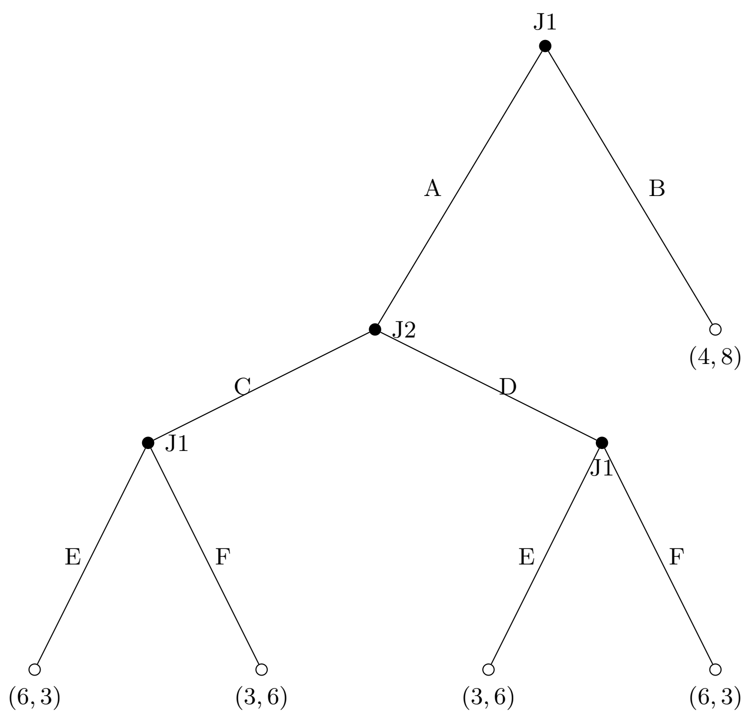
$$4p = 2$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Debido a que la matriz de pagos es simétrica, se tiene que ENEM es $S^* = ((0{,}5, 0{,}5), (0{,}5, 0{,}5))$, por lo que este es el EPS del juego.

P2

Considere el siguiente juego secuencial.



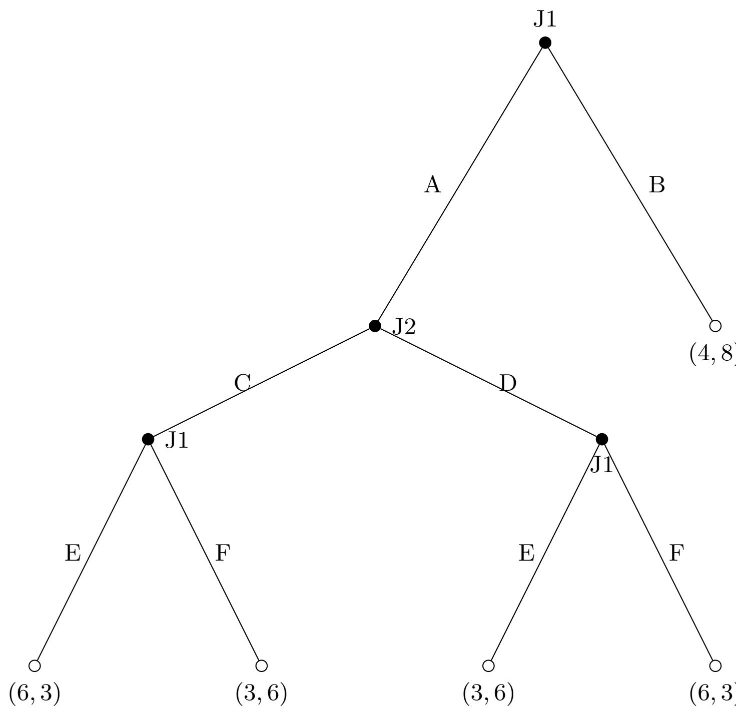
1. Mencione los conjuntos de información
2. Mencione los Subjuegos
3. Encuentre todos los EPS
4. ¿Cómo cambia el problema si el jugador 1 no sabe lo que juega el jugador 2?

Solución:

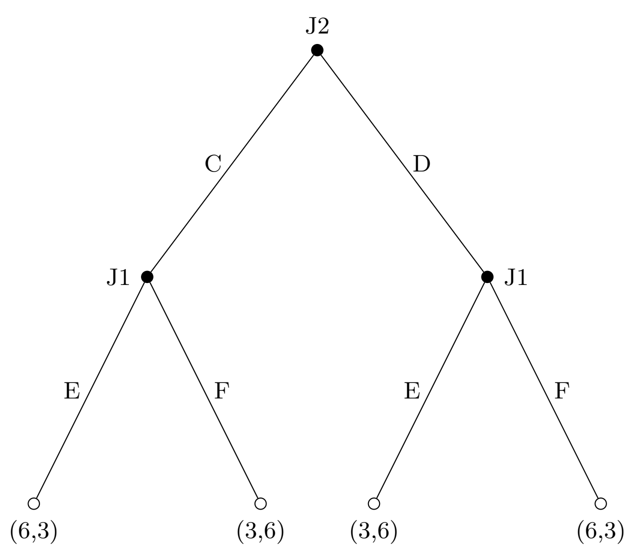
1) Los conjuntos de información son un conjunto de nodos que un jugador no puede distinguir, por lo que se hace la diferencia entre el conjunto de información para el jugador 1 y para el jugador 2. En este caso, como se tiene información perfecta (todos los jugadores pueden distinguir en qué nodo se encuentran antes de tomar una decisión), entonces los conjuntos de información nos quedan de la siguiente manera: $I_1 = \{\{C\}, \{D\}, \{n_0\}\}$ y $I_2 = \{A\}$ (n_0 representa al nodo inicial y el nodo i es el nodo justo después de que el otro jugador elija jugar i).

Para expresar los subjuegos existen 2 maneras, la más fácil al momento de responder en una evaluación es mediante el dibujo de cada subjuego, por ejemplo para este caso queda de la siguiente forma:

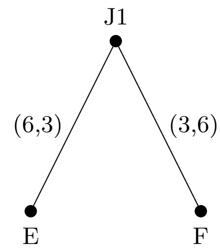
Subjuego 1 (el mismo juego)



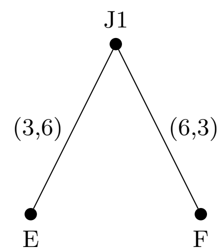
Subjuego 2



Subjuego 3



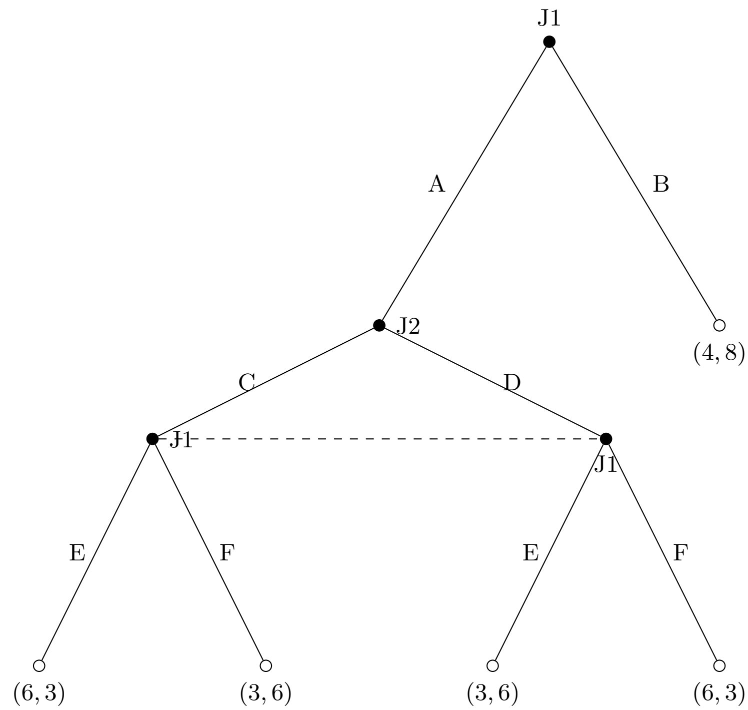
Subjuego 4



También los puede mencionar como: Subjuego 1; aquel que es igual al juego completo (comienza en el nodo n_0), Subjuego 2; comienza en el nodo A (nodo luego de la jugada A por parte del J1), Subjuego 3; árbol que comienza con el nodo C y Subjuego 4; árbol que comienza con el nodo D.

c) Los EPS se calculan de la misma forma que en la P1, porque es un árbol de información perfecta, entonces los EPS quedan de la forma $EPS = \{((A, E), C); ((A, F), D)\}$.
Nota: la nomenclatura de los EPS es la siguiente: ((1era jugada J1 (primer nivel), 2da jugada J1 (3er nivel), 1ra jugada J1 (2do nivel)).

d) En el caso en que el J1 no sabe lo que juega J2, se tiene el siguiente árbol:



Para el J2 no cambia su conjunto de información, mientras que para el J1, se tendrá que $I_1 = \{\{A\}, \{C, D\}\}$, esto porque en el tercer nivel, el primer jugador no puede distinguir entre los nodos C y D, porque no tiene la información sobre que juega el otro jugador.

Siguiendo con los subjuegos, la cantidad de subjuegos es igual a la cantidad de conuntos de información que son un singleton, en este caso hay 2 singleton, por lo que hay 2 subjuegos. El primer subjuego es el que comienza en el nodo n_0 (juego completo) y el segundo es el que comienza en el nodo A

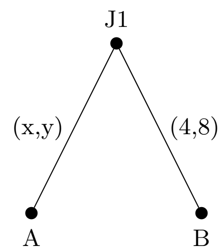
Siguiendo con los EPS, partimos buscando EN en el subjuego más pequeño, el cuál como tiene información imperfecta, es equivalente a encontrar un EN en un juego simultáneo, por lo que, dejamos expresada la matriz de pagos:

		J2	
		C	D
J1	A,E	6, 3	3, 6
	A,F	3, 6	6, 3

Al igual que en la P1, se nota que este juego no tiene EN en estrategias puras, por lo que se hace el desarrollo para encontrar ENEM, para lo cual asignamos $\sigma = (p, 1-p)$ para J1 (es decir, con probabilidad p juega (A,F) y con probabilidad complementaria juega (A,E). Luego aplicamos el criterio de indiferencia para las utildades de J2 y nos queda que:

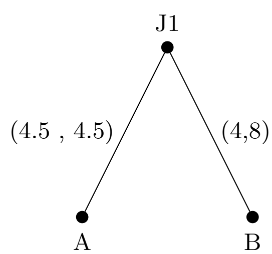
$$E[U_2(C,\sigma) = E[U_2(D,\sigma)]$$
$$6p + 3(1-p) = 3p + 6(1-p)$$
$$6p = 3$$
$$p = \frac{1}{2}$$

Por lo que, el ENEM de este subjuego es $S^* = ((0{,}5, 0{,}5), (0{,}5, 0{,}5))$, ahora imponemos que en este subjuego se juega dicho ENEM, entonces, el primer subjuego (juego completo) queda de la siguiente forma:



Donde, x e y son los pagos esperados de cada jugador al jugar dicho ENEM

$$x = \frac{6+3+6+3}{4} = y = 4{,}5$$



Luego, si J1 escoge A, obtiene una utilidad de 4.5 en vez de 4, por lo que, no tiene ningún incentivo a desviarse, en consecuencia, se tiene que jugar $(A,\sigma),\sigma)$ es un ENEM para este subjuego, finalmente, se tiene que $\{\{A, (0{,}5, 0{,}5)\}, (0{,}5, 0{,}5)\}$

$\boxed{\textbf{P3}}$

Dos firmas $j \in \{1,2\}$ compiten en cantidades de un producto homogéneo, donde la demanda sigue un comportamiento lineal $p(Q) = 50 - Q$. El costo marginal de cada firma es $c+\gamma$ y c para la firma 1 y 2 respectivamente, con $\gamma > 0$. Sabiendo que la firma 1 escoge antes que la firma 2, calcule las estrategias óptimas y sus utilidades de cada firma.

Escribimos la función de utilidades para cada firma.

$$\pi_1 = (50 - (q_1 + q_2))q_1 - (c + \gamma)q_1$$

$$\pi_2 = (50 - (q_1 + q_2))q_2 - (c)q_2$$

La principal diferencia con los problemas de Cournot, es que ahora, q_2 ya no es una constante con respecto a q_1, debido a que como la firma 1 elige primero la cantidad, entonces la segunda firma escogerá racionalmete, el valor que más le convenga, dado lo que eligió la firma 1 (ocuparemos la función de mejor respuesta). Entonces, debemos encontrar $BR_2(q_1)$

$$BR_2(q_1) = \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0$$
$$BR_2(q_1) = 50 - q_1 - 2q_2 - c = 0$$
$$q_2 = \frac{50 - q_1 - c}{2}$$
$$BR_2(q_1) = \frac{50 - q_1 - c}{2}$$

Ahora para obtener q_1^*, se debe considerar que $q_2 = \frac{50 - q_1^* - c}{2}$, entonces nos queda que la función de utilidades para la primera firma es:

$$\pi_1 = (50 - (q_1 + \frac{50 - q_1 - c}{2}))q_1 - (c + \gamma)q_1$$

Aplicamos CPO nuevamente y obtenemos que:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{50 - q_1 + c - q_1}{2} - (c + \gamma) = 0$$
$$q_1^* = \frac{50 - c - 2\gamma}{2}$$

Lo cual implica que

$$BR_2(q_1^*) = \frac{50 - q_1^* - c}{2}$$
$$q_2^* = \frac{50 - \frac{50 - c - 2\gamma}{2} - c}{2}$$
$$q_2^* = \frac{50 - c + 2\gamma}{4}$$

Finalmnete, se puede despejar Q y P

$$Q^* = q_2^* + q_2^* = \frac{150 - 3c - 2\gamma}{4}$$

$$P = \frac{50 + 3c + 2\gamma}{4}$$

Para calcular las utilidades, basta con reemplazar Q, P, q_1 y q_2 en las funciones de utilidades definidas para cada firma