Auxiliar 2

Teoría de Juegos

Pregunta 1

Discuta las siguientes afirmaciones.

a) Considere la siguiente afirmación: "En un juego en forma normal, todos los equilibrios de Nash son Pareto eficientes". Si es verdadera, demuestre la veracidad de la afirmación. Si es que es falsa, provea un contra ejemplo.

Falso, existen juegos en los que los equilibrios de Nash no son pareto eficientes. Por ejemplo, en el dilema del prisionero el EN es que los jugadores se delaten mutuamente. Sin embargo, si cooperan, ambos tendrían mayor pago.

b) Muestre un juego en forma normal en el que no existen estrategias dominadas, pero si existe un equilibrio de Nash.

Si tomamos el juego de la gallina visto en clases, en que hay dos jugadores y dos estrategias para cada jugador, encontramos que existen dos EN: uno en el que J1 cede y J2 se mantiene firme; otro en el que ocurre lo contrario. Como ninguna de las dos estrategias es dominante, se tiene lo que se pide.

Pregunta 2

1. Considere los juegos descritos por las siguientes matrices de pago:

J1 \ J2	v	a	r
p	$(1,3)$	$(2,2)$	$(1,4)$
l	$(2,3)$	$(5,2)$	$(2,4)$
t	$(0,5)$	$(2,2)$	$(1,4)$
c	$(3,3)$	$(4,2)$	$(4,2)$

Determine el equilibrio de Nash.

Para encontrar el equilibrio de Nash, lo haremos intersectando las mejores respuestas. Para ello debemos recorrer todas las estrategias de J1 y ver cuál es la mejor respuesta de J2 ante cada una de las estrategias del contrincante y viceversa.

Primero **recorreremos las estrategias del J1** y veremos la mejor respuesta del J2 ante cada una de ellas:

- Si J1 elige jugar p entonces J2 prefiere jugar r pues $4 > 3 > 2$. Así colocamos una linea bajo el pago 4 indicando que r es la mejor respuesta de J2 ante la estrategia de jugar p de J1.

J2

J1	v	a	r
p	$(1,3)$	$(2,2)$	$(1,\underline{4})$
l	$(2,3)$	$(5,2)$	$(2,4)$
t	$(0,5)$	$(2,2)$	$(1,4)$
c	$(3,3)$	$(4,2)$	$(4,2)$

- Si J1 decide jugar l, la mejor respuesta de J2 es jugar r pues $4 > 3 > 2$. Así, la mejor respuesta del J2 ante la jugada de l del J1, es r.

J2

J1	v	a	r
p	$(1,3)$	$(2,2)$	$(1,\underline{4})$
l	$(2,3)$	$(5,2)$	$(2,\underline{4})$
t	$(0,5)$	$(2,2)$	$(1,4)$
c	$(3,3)$	$(4,2)$	$(4,2)$

- Si J1 decide jugar t, la mejor respuesta de J2 es jugar v pues $5 > 4 > 2$. Así, la mejor respuesta del J2 ante la jugada de t del J1, es v.

J2

J1	v	a	r
p	$(1,3)$	$(2,2)$	$(1,\underline{4})$
l	$(2,3)$	$(5,2)$	$(2,\underline{4})$
t	$(0,\underline{5})$	$(2,2)$	$(1,4)$
c	$(3,3)$	$(4,2)$	$(4,2)$

- Si J1 decide jugar c, la mejor respuesta de J2 es jugar v pues $3 > 2$. Así, la mejor respuesta del J2 ante la jugada de c del J1, es v.

J2

J1	v	a	r
p	$(1,3)$	$(2,2)$	$(1,\underline{4})$
l	$(2,3)$	$(5,2)$	$(2,\underline{4})$
t	$(0,\underline{5})$	$(2,2)$	$(1,4)$
c	$(\underline{3},3)$	$(4,2)$	$(4,2)$

Como ya hemos recorrido todas las posibles estrategias de J1 y encontramos las mejores respuestas del J2 ante cada una de ellas. **Ahora debemos iterar sobre las estrategias del J2**, y escoger la mejor respuesta de J1 a cada una de ellas:

- Si J2 elige v, la mejor respuesta del J1 será jugar c, pues $3 > 2 > 1 > 0$. Así, la mejor respuesta de J1 ante la jugada de v de J2, es c.

J2

		v	a	r
J1	p	$(1,3)$	$(2,2)$	$(1,\underline{4})$
	l	$(2,3)$	$(5,2)$	$(2,\underline{4})$
	t	$(0,\underline{5})$	$(2,2)$	$(1,4)$
	c	$(\underline{3},\underline{3})$	$(4,2)$	$(4,2)$

- Si J2 elige a, la mejor respuesta del J1 será jugar l, pues $5 > 4 > 2$. Así, la mejor respuesta de J1 ante la jugada de a de J2, es l.

J2

		v	a	r
J1	p	$(1,3)$	$(2,2)$	$(1,\underline{4})$
	l	$(2,3)$	$(\underline{5},2)$	$(2,\underline{4})$
	t	$(0,\underline{5})$	$(2,2)$	$(1,4)$
	c	$(\underline{3},\underline{3})$	$(4,2)$	$(4,2)$

- Si J2 elige r, la mejor respuesta del J1 será jugar c, pues $4 > 2 > 1$. Así, la mejor respuesta de J1 ante la jugada de r de J2, es c.

J2

		v	a	r
J1	p	$(1,3)$	$(2,2)$	$(1,\underline{4})$
	l	$(2,3)$	$(\underline{5},2)$	$(2,\underline{4})$
	t	$(0,\underline{5})$	$(2,2)$	$(1,4)$
	c	$(\underline{3},\underline{3})$	$(4,2)$	$(\underline{4},2)$

Con esto, obtenemos las mejores respuestas de cada uno de los jugadores. El equilibrio de Nash será la intersección de mejor respuesta (jugadas con *underline* en ambos pagos), la que en este caso es (v,c), único equilibrio de Nash. En este punto ninguno de los jugadores tiene incentivos a desviarse y cambiar de estrategia.

2. Calcule todos los equilibrios de Nash del juego a través de EIEED.

		J2		
		D	E	F
J1	A	$(3,3)$	$(10,1)$	$(1,2)$
	B	$(0,1)$	$(8,3)$	$(4,0)$
	C	$(5,6)$	$(7,1)$	$(6,4)$

Para poder encontrar el equilibrio de Nash a través de EIEED, debemos encontrar estrategias dominadas.

- Viendo la matriz de pagos, podemos ver que D domina a F, ya que J2 siempre preferirá jugar D antes que jugar F. Si J1 juega A, J2 prefiere jugar D antes que F ($3 > 2$). Si J1 juega B, J2 prefiere jugar D antes que F (1¿0). Si J1 juega C, nuevamente sucede lo mismo, J2 prefiere jugar D antes que F ($6 > 4$), por ende ante cualquier estrategia de J1, J2 siempre prefiere jugar D antes que F, y por lo tanto D domina a F y F es una estrategia estrictamente dominada, por lo que J2 no la jugará nunca (jugadores racionales no juegan estrategias estrictamente dominadas). Así, procedemos a eliminarla. La matriz de pago queda de la siguiente manera:

		J2	
		D	E
J1	A	$(3,3)$	$(10,1)$
	B	$(0,1)$	$(8,3)$
	C	$(5,6)$	$(7,1)$

- Con la matriz de pagos resultante, podemos ver que A domina a B. Si J2 juega D, J1 prefiere jugar A antes que B ($3 > 0$). Si J2 juega E, J1 jugará A antes que B ($10 > 8$). Así, ante cualquier estrategia de J2, J1 decide jugar A antes que B, y por ende B es una estrategia estrictamente dominada y procedemos a eliminarla (jugadores racionales nunca juegan su estrategia dominada, jugador contrincante sabe que su adversario no jugara una estrategia estrictamente dominada, es por esto que la eliminamos).

		J2	
		D	E
J1	A	$(3,3)$	$(10,1)$
	C	$(5,6)$	$(7,1)$

- Con la matriz resultante podemos ver que D domina a E. Si J1 elige jugar A, J2 prefiere jugar D antes que E ($3 > 1$). Si J1 elige jugar C, J2 prefiere jugar D antes que E ($6 > 1$). Por lo tanto, E es una estrategia estrictamente dominada por D y procedemos a eliminarla.

		J2
		D
J1	A	$(3,3)$
	C	$(5,6)$

- Finalmente, J1 elige C antes que A ($5 > 3$) y por lo tanto C domina a A.

		J2
		D
J1	C	$(5,6)$

Así, el resultado de la EIEED es el equilibrio de Nash (C,D).

Pregunta 3

Considere el siguiente juego:

		J2	
		L	R
J1	U	(a,b)	(c,d)
	D	(e,f)	$(0,0)$

Encuentre condiciones necesarias y suficientes para que las siguientes afirmaciones sean ciertas:

a) U es estrictamente dominada.

Para que U sea estrictamente dominada, entonces ante cualquier jugada de J2, J1 debe preferir elegir D antes que U. Esto solamente se cumple si:

$$u_1(D,L) > u_1(U,L) \iff e > a$$
$$u_1(D,R) > u_1(U,R) \iff 0 > c$$

Con estas dos condiciones U es estrictamente dominada. Por tanto se tiene que cumplir que: $e > a \land 0 > c$

b) (U,R) es solución de EIEED.

Para que (U,R) sea solución de EIEED, se pueden dar tres opciones:

1. J1 elimina D y luego J2 elimina L. Comencemos con las condiciones necesarias para que J1 elimine D:

$$u_1(D,L) < u_1(U,L) \iff e < a$$
$$u_1(D,R) < u_1(U,R) \iff 0 < c$$

Con estas condiciones J1 elimina D (porque es una estrategia estrictamente dominada). Sólo nos queda descubrir qué condiciones se deben cumplir para que J2 elimine L:

$$u_2(U,R) > u_2(U,L) \iff d > b$$

Para que J2 elimine L, sólo necesitamos una condición, ya que J2 sabe que J1 nunca jugará una estrategia estrictamente dominada.

Así, se debe cumplir: $a > e \wedge d > b \wedge c > 0$

2. J2 elimina L y luego J1 elimina D. Ahora, partiremos con las condiciones necesarias para que J2 elimine L:

$$u_2(U,L) < u_2(U,R) \iff b < d$$
$$u_2(D,L) < u_2(D,R) \iff f < 0$$

Con estas condiciones J2 elimina a L.

Veamos qué condiciones se deben cumplir para que J1 elimine D:

$$u_1(U,R) > u_1(D,R) \iff c > 0$$

Así, se debe cumplir: $0 > f \wedge d > b \wedge c > 0$

3. Ambos eliminan en primera instancia, sin la necesidad de que el otro jugador elimine alguna estrategia primero.

J1 elimina D:

$$u_1(D,L) < u_1(U,L) \iff e < au_1(D,R) < u_1(U,R) \iff 0 < c$$

J2 elimina L:

$$u_2(U,L) < u_2(U,R) \iff b < du_2(D,L) < u_2(D,R) \iff f < 0$$

Así, se debe cumplir: $0 > f \wedge d > b \wedge c > 0 \wedge a > e$

c) (U,R) es Equilibrio de Nash.

Para que (U,R) sea EN basta con que no hayan incentivos a desviarse:

$$u_1(U,R) > u_1(D,R) \iff c \geq 0 u_2(U,R) > u_2(U,L) \iff d \geq b$$

Así, las condiciones que se deben cumplir son: $c \geq 0 \wedge d \geq b$