



Thence reflect, o water surface, my infinite self!

¡Saludos! Hay un tema que bastante gente encuentra particularmente bonito en el tópico que es la mecánica cuántica, y este es el concepto de simetrías aplicado, valga la redundancia, a la cuántica.

La idea desarrollada por Emmy Noether hace poco más de 100 años se concibió pensando en sistemas puramente deterministas. Buscamos entonces trasladar esta idea al mundo cuántico. ¿Cómo haremos esto?

Una potencial forma de realizarlo es considerando *cuál era la idea de Noether al formular sus teoremas sobre cantidades conservadas y simetrías*.

El contexto histórico de esto era tanto esperanzador como desolador, ya que era el momento en que estaba naciendo la relatividad general, de parte de dos gigantes: Albert Einstein y David Hilbert. Pese a que esta teoría estaba siendo cimentada por dos de las mentes más prodigiosas de su tiempo, ¡Tenían dificultades con formular un concepto fundamental de la física clásica! Esta era la conservación de la energía.

En esta desesperación para poder trasladar esta idea a la física relativista, llamaron a una notable matemática que Hilbert conocía de antemano: La mismísima Emmy Noether, quien formuló sus teoremas respectivos a las cantidades conservadas, que explican cuando, justamente, se conservan. Esto ya lo vieron en su ramo de mecánica clásica, de forma general se puede desprender de la siguiente idea:

“Toda simetría del sistema, lleva, en consecuencia, a una cantidad conservada”

¿Qué es realmente una simetría? Para esto debemos pensar en como “movemos” un sistema físico; en el caso de física clásica lo hacen con variaciones de varios tipos, llevando en consecuencia ciertas conservaciones:

$$\begin{aligned} t &\mapsto t + \delta t && \sim \text{la energía.} \\ x &\mapsto x + \delta x && \sim \text{el momento lineal.} \\ \theta &\mapsto \theta + \delta\theta && \sim \text{el momento angular.} \end{aligned}$$

Y luego desarrollar matemáticamente la idea, hasta llegar a un conjunto de ecuaciones. Esto en física clásica tenía todo el sentido del mundo, ya que la posición de un vector en el mismo siempre está bien definida. ¿Cómo llevamos esto a la mecánica cuántica?

Esto se vuelve un poco problemático por varios motivos, uno de estos puede ser que, si dejamos fuera el caso temporal, que merece su atención de forma distinta por sí mismo, es que gracias al *principio de indeterminación de Heisenberg* la posición ni el momento están bien definidos como conjunto. ¿Qué podemos hacer entonces? Debe haber alguna forma de recuperar estas formulaciones.

¿Cómo representamos las cantidades físicas que podemos medir? Pero por supuesto, ¡Operadores!

★ Recordemos también que un sistema físico tenía toda su información relevante contenida en su vector de estado $|\psi\rangle$.

Entonces, ¿Cómo sería la traslación espacial en un sistema cuántico? Pues hay, al igual que en el caso clásico, dos posibles perspectivas: Que se trasladen los **vectores**, o que se trasladen los **operadores**, que corresponden respectivamente al esquema de **Schrödinger** y de **Heisenberg**.

Pensemos inicialmente con el caso del esquema de Schrödinger, en tal caso debemos pensar como actúan los operadores sobre un vector de estado. También nos conviene recordar que para obtener la función de onda en base posición, se deben usar bra-kets que permiten recuperar la posición, los $|x\rangle$. Entonces si hacemos una traslación espacial, significa que estamos modificando esta base, moviendo elementos de un lado para otro en particular, porque podemos definir el operador traslación espacial como aquel que opera como:

$$T_\alpha |x\rangle = |x + \alpha\rangle$$



Con esto en mente, rápidamente podemos notar que:

$$T_{\alpha}^{-1} |x\rangle = |x - \alpha\rangle$$

¿Cómo podemos ver esto? Notando que si lo anterior mueve las posiciones a la derecha, moverse a la izquierda debe dejarte donde mismo, es decir, ahí se recupera la identidad.

Por otro lado, ¿Qué debería hacer con la normalización esto? Consideremos un punto nombrado anteriormete: Nos mueve la base, es como cuando tenemos una matriz con varias coordenadas y, por ejemplo, hacemos un “*shift*” de las mismas (hacemos $Mx_n = x_{n+1}$ por ejemplo, y el último nos lo manda al primero). Una matriz como esta se ve como:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos notar, asimismo, que la inversa de esta matriz... ¡Es su traspuesta! Ya que si se asume que su base es ortonormal, entonces la traspuesta acá sería como “regresar” todo el intercambio de autovectores que se hizo. De forma análoga, se puede demostrar que T_{α} , para cualquier α real¹ es un operador unitario, es decir, que la generalización de la traspuesta, es decir, su traspuesto conjugado, es su inversa, en otras palabras, obtenemos que:

$$T_{\alpha}^{-1} |x\rangle = T_{\alpha}^{\dagger} |x\rangle = |x - \alpha\rangle$$

Ahora, la buena pregunta que debemos hacernos siempre como físicos es:

¿Cómo cambia el sistema si varío un poco este?

Después de todo, con una lógica así Newton dedujo sus leyes de movimiento, Stokes produjo sus ecuaciones de fluidos, o Emmy Noether produjo sus teoremas de conservación.

En este caso, como los $|x\rangle$ forman una base, la pregunta sería: **¿Cómo varía $|\psi\rangle$ si variamos un poco en la base $|x\rangle$?** ¡La idea no es descabellada!

Recordemos, vamos a pedirle a la ecuación de Schrödinger que sea continua. Debe haber entonces alguna relación con los valores cercanos. Ahora viene el pequeño desarrollo matemático visto en clase auxiliar: ¿Cómo es $T_{\alpha} |\psi\rangle$ para $|\alpha| \ll 1$? Veremos esto en base posición, ya que es la natural para el propósito que estamos considerando:

$\langle x T_{\alpha} \psi \rangle = \langle x T_{\alpha} \mathbb{I} \psi \rangle$	Truco usual
$= \langle x T_{\alpha} \int x'\rangle \langle x' dx' \psi \rangle$	Base donde sabemos como actúa T_{α}
$= \int \langle x T_{\alpha} x' \rangle \langle x' \psi \rangle dx'$	Linealidad
$= \int \langle x x' + \alpha \rangle \psi(x') dx'$	Escribir en base posición
$= \int \delta(x - x' - \alpha) \psi(x') dx'$	Base posición
$= \psi(x - \alpha)$	Era el valor de x' para el cual $x - x' - \alpha = 0$
$= \psi(x) - \partial_x \psi(x) \alpha + o(\alpha)$	Taylor
$= \langle x \psi \rangle + \frac{i\alpha}{\hbar} \langle x \hat{p} \psi \rangle + o(\alpha)$	Identificar que $\langle x \hat{p} \psi \rangle = -i\hbar \partial_x \psi(x)$

¹Vector en el caso que trabajemos en 2D o 3D.



Este desarrollo podría serles útiles, **porque son pasos que siempre se usan**, se repiten permanentemente.². Con esto, entonces, podemos notar lo siguiente: Que podemos llevar esto a una cosa como una derivada por definición, dícese:

$$\langle x | \frac{T_\alpha - \mathbb{I}}{\alpha} | \psi \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle x | \hat{p} | \psi \rangle + \frac{o(\alpha)}{\alpha}$$

Si tiramos límite con $\alpha \rightarrow 0$, obtenemos que el lado izquierdo es como... ¡Una derivada espacial! Esto queda más claro si tomamos $|\psi\rangle = |y\rangle$, en tal caso, y considerando que como los $|x\rangle$ forman una base, entonces la igualdad es igual por coeficiente (ie, por cada término que está siendo multiplicado por $\langle x|$), obtenemos que:

$$\frac{|x + \alpha\rangle - |x\rangle}{\alpha} = \frac{i}{\hbar} \hat{p} | \psi \rangle + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{dx} |x\rangle = \frac{i}{\hbar} \hat{p} | \psi \rangle$$

DISCLAIMER, ESTOY CASI TOTALMENTE SEGURO DE QUE TENGO UN SIGNO MALO EN ALGUNA PARTE

¿Porqué están todos tan obsesionados con el momento angular?

Un equivalente que suele aparecer es el del operador momento angular $\hat{L}$, correspondiente al generador de las traslaciones angulares, escritas como:

$$\frac{d}{d\theta} |\theta\rangle = \hat{L} |\theta\rangle$$

Ahora, con todo esto, podemos recordar un poco la idea de la ecuación de Schrödinger, en tal caso obteníamos que:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$$

¡En este caso tenemos una ecuación de corte similar a esta! En general, con este procedimiento, se obtienen cosas llamadas *generadores*. Como ejercicio les recomendamos hacer un equivalente con el operador que traslada el momentum.

Muy bonito todo esto. ¿Un resumen?

Con todo lo anterior, con operadores que nos “muevan” la base, podemos pensar en el caso general. Esta es la clave de los llamados **generadores**, y es que nos dicen **a qué ritmo cambia la base**. Ahora, las propiedades importantes para los operadores de traslación que hemos usado son las siguientes.

Si U_α es un operador que transforma una base continua $|s\rangle$ trasladándola a $|s + \alpha\rangle$, entonces este operador cumple con dos propiedades clave:

- **Es unitario:** Esto en clave física significa que no debe afectar a la amplitud de probabilidad total. En otras palabras, para cada α debe tenerse que $U_\alpha^\dagger U_\alpha = \mathbb{I}$.
- **Es Aditivo:** Si se aplica de forma consecutiva, entonces debe dar lugar a que $U_\alpha U_\beta = U_{\alpha+\beta}$.

Estos dos pasos (fundamentalmente el segundo), nos permiten ver que se puede “derivar” esta base $|s\rangle$. Y con ello obtener una ecuación diferencial del estilo:

$$i\hbar \frac{d}{ds} |s\rangle = G |s\rangle$$

²No suele ser necesario que pongan el $o(\alpha)$ eso sí, ahí suele bastar con decir $\approx$ en vez de un igual y listo, como suelen hacer de hecho.



Donde a G se le conoce como el **generador** de U , ya que permite que se escriba U , correspondiente a los movimientos finitos de la base (no necesariamente pequeños), como:

$$U_s = e^{-\frac{is}{\hbar}G}$$

Recordando, a su vez, mecánica clásica, esto permite recordar porqué son similares varios operadores de la cuántica que no es obvio que lo sean en su caso cuántico (véase, por ejemplo, el operador momento angular). La formulación base que nos permite crear una expresión inicial, es el mismo principio que en la clásica: Ver qué cosa hace que un ángulo cambie, correspondiente justamente a algo con el momento angular. Esto, de hecho, es tan fundamental que se puede llevar ¡Aún más lejos! La formulación matemática de todo lo expresado hasta acá corresponde al llamado “Teorema de Stone”. La idea base se puede aplicar, también al concepto del operador evolución temporal, considerando que dicho operador U se le suele pedir que sea autoadjunto (para que preserve la probabilidad total 1) y que sea aditivo (es decir, que podamos evolucionar una vez y luego otra, y que sea equivalente a que evolucionemos todo de una vez). Lo cual lleva... ¡A la ecuación de Schrödinger!

¿Cómo es la función de onda cuando se le aplica este generador?

Podemos ver que depende de la conmutación de dicha variable con el operador de evolución temporal, para este efecto volveremos al esquema de Heisenberg, en efecto:

$$\langle \psi(t) | S | \psi(t) \rangle = \langle \psi_0 | U(t)^\dagger S U(t) | \psi_0 \rangle$$

Si le queremos pedir al sistema, que esto se conserve **siempre**, entonces esta cantidad debe ser la misma que en la posición inicial, vale decir:

$$(\forall |\psi_0\rangle) \langle \psi_0 | U(t)^\dagger S U(t) | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | S | \psi_0 \rangle \implies U(t)^\dagger S U(t) = S$$

Si recordamos que el operador de evolución temporal, se obtiene una relación interesante, esta es que:

$$S U(t) = U(t) S$$

¡Una relación de conmutación! Podemos ir, de hecho, un paso más lejos y tratar de ver la relación de esto con el generador, con ello se obtiene que:

$$S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} H^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} H^n S$$

Si llevamos todo a un solo lado, obtenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} (S H^n - H^n S) = 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} [S, H^n] = 0$$

Se puede ver entonces, una relación similar al teorema de Noether clásico, que relaciona invarianzas del sistema con simetrías de la misma, a través de los generadores. Si tenemos una perturbación finita S , esto significa que:

$$\begin{array}{ccccc} [S, U(t)] = 0 & \iff & [S, H] = 0 & \iff & [G, H] = 0 \\ \text{Invarianza} & \iff & \text{Simetría} & \iff & \text{Conservación} \end{array}$$

El punto invariante, es que si perturbamos la base del sistema (por ejemplo la posición), la dinámica no cambia, es decir, el sistema es invariante a dichos cambios finitos. Esto se puede demostrar también, argumentando que dicha perturbación finita conmuta con el operador que genera la evolución temporal, es decir, el Hamiltoniano. Concluimos que esto equivale a que el Hamiltoniano conmute con el generador de la perturbación.



Esto no se cumple para todas las simetrías eso sí, ya que se tienen que ser... ¡Simetrías continuas! Esto deja afuera, por ejemplo, la simetría de paridad o la de reversión temporal, ya que estas lo que hacen es una aplicación discreta:

$$\begin{array}{ll} \text{Inversión temporal} & t \mapsto -t \\ \text{Paridad} & x \mapsto -x \end{array}$$

Con ello toda la lógica anterior que permite crear un generador se rompe, y con ello en la triple equivalencia anterior no se puede obtener una cantidad conservada. Además, en el caso de inversión temporal, no estamos afectando a ninguna base en sí, sino que vemos que sucede al manipular el tiempo como variable, esto hace que su manejo sea distinto a las demás simetrías, que requieren un manejo con una base en particular. (Entre otras cosas, se obtiene que el operador de inversión temporal no es unitario, sino anti-unitario).

$$T \text{ operador de inversión temporal} \quad T^\dagger \neq T$$

Esto lleva a que se observe la llamada “degeneración de Kramers”, que nos dice que si hay simetría de inversión temporal, ie, que se tiene la relación

$$[T, H] = 0$$

Entonces para cada autoestado $|E\rangle$ de H con energía E , entonces existe otro autoestado $T|E\rangle$ que tiene la misma energía. Este autoestado puede o no ser igual al original, esta degeneración adquiere importancia cuando aparecen cantidades como el *spin*, que hacen que haya una degeneración al momento de ver las energías del Hamiltoniano.

Nótese que con todo lo anterior ya tenemos en mano al menos dos postulados ya completamente considerados dentro de esta poderosa idea de ver que pasa si trasladamos un parámetro un poquito, ya sea el tiempo o la posición. Se puede generalizar todo esto *aún más*, permitiendo incluso reemplazar ciertos postulados por la relación de conmutación canónica, correspondiente a que:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \mathbb{I}$$

Estas ideas permiten ver la mecánica cuántica con ojos de otro tipo, mucho más algebraicos. Una perspectiva que desarrolló en gran medida Hermann Weyl, quien ha tenido grandes aportes en diversas áreas del conocimiento humano en general, en física y matemática. A varios les incomodaba fuertemente este enfoque más algebraico, ¡Incluso a su mismo creador! Que queda encapsulado, a su vez, en una cita de este llamativo personaje, en la cual se refería a las matemáticas más que la física, sin embargo puede ser *ad hoc* también:

‘La simetría, tan amplia o angosta como les guste dar significado, es una idea a través de la cual la humanidad ha intentado comprender y crear orden, belleza y perfección. En estos días el ángel de la topología y el demonio del álgebra abstracta luchan por el alma de cada área de las matemáticas’
(Hermann Weyl, Invariants, 1939)

Referencias y más contenido

Cátedra de Simetrías (en inglés)

Traslaciones y momentum (en inglés)

Extracto de un libro(en inglés) (más avanzado, pero ¡puede ser útil!)