Jesse, tu no eres un paquete Gaussiano

¡Saludos! A lo largo de la revisión de la tarea 1, se pudo observar un fenómeno curioso: No se notaba una idea clara entre todos de qué significaba exactamente representar un operador de forma matricial. Entonces vayamos de vuelta al curso de álgebra lineal y preguntémonos, **QUE ES EXACTAMENTE UNA MATRIZ?**

La idea de una matriz es representar de forma cómoda como funciona un operador lineal. Para esto tenemos que considerar que esto servirá por dos frentes distintos:

1. El operador es lineal, si A es el operador y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ son escalares y $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ vectores, entonces tenemos que:

$$A[\lambda|\psi\rangle + \mu|\phi\rangle] = \lambda A|\psi\rangle + \mu A|\phi\rangle \tag{1}$$

2. Para tener funciones cuyos elementos en su dominio se pueden sumar y ponderar, deben estar presentes en un **espacio vectorial**, y allí existe el concepto de base, que es un conjunto de vectores $\{|i\rangle\}_{i\in I}$, donde i pueden ser un conjunto finito, los reales, los enteros, etc. tales que **cualquier vector del espacio se puede escribir de forma única como combinación lineal de estos**. En otras palabras, si $|\psi\rangle$ pertenece al espacio vectorial, entonces se puede escribir de forma única (ie, hay un conjunto único de escalares $\{\lambda_i\}_{i\in I}$) tal que:

$$|\psi\rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i |i\rangle \tag{2}$$

La idea de representación como matriz viene de mezclar ambos puntos: ¿Qué pasa si consideramos esta descomposición antes y después de aplicar el operador? Una consecuencia rápida que se puede ver es que basta ver como actúa A sobre cada elemento de la base, esto porque:

$$A|\psi\rangle = A\left(\sum_{i\in I} \lambda_i |i\rangle\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i A|i\rangle \tag{3}$$

Entonces podemos notar que sabiendo $A|i\rangle$, sumando y ponderando adecuadamente, obtendremos como actúa el operador sobre cualquier vector del espacio (ie, sobre cualquier ket), gracias a que los $|i\rangle$, como dijimos antes, forman una base.

Muy bien, con lo anterior pensamos en el *input*, sin embargo esto es una mitad del escenario, falta ver la otra mitad del escenario, falta ver el *output*. Consideremos entonces un vector $|\psi\rangle$ al que le aplicamos el operador A, entonces $A|\psi\rangle$, ¿Qué es? Por como estamos construyendo estos operadores (y como los utilizamos), $A|\psi\rangle$ debe devolver *un vector*, un *ket*.

Acá está el paso astuto: *Escribir* $A|\psi\rangle$ en la base. Pero antes de hacer cualquier cálculo complicado, recordemos lo que dijimos antes: Que la imagen de cualquier vector se podía deducir por las imágenes de los vectores de la base. Probemos entonces con los vectores de la base:

$$A|j\rangle = \sum_{i\in I} a_{ij} |j\rangle \tag{4}$$

Con esto en mente, ya vemos una similitud grande con las matrices con las que somos familiares (la elección de subíndices no es casual), podríamos pensar entonces en una forma de escribir los vectores con la notación matricial de álgebra lineal, podríamos poner:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \text{Y todo el resto de vectores de la base...}\ldots$$

¡Ojo eso sí! Escribir los vectores así no significa que necesariamente sean ortogonales. Para prevenir eso, por mientras, podemos considerar que los vectores escritos de esta forma sólo se pueden **sumar entre sí** y se pueden **ponderar**, pero no veremos como hacerles producto interno. (Aún?)

Pero veremos más sobre ello más adelante (o quizás no). ¡Pero que nos distraemos! Volvamos al operador A, ya tenemos como actúa sobre cada elemento de la base, entonces podríamos intentar ver como agrupar de forma cómoda esta información. Veamos algunas inspiraciones para escribir esto bien:

La imagen de cada elemento de la base se puede escribir de una determinada forma, entonces si le aplicamos el operador A a un vector arbitrario $|\psi\rangle$ que se puede descomponer como

$$|\psi\rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i |i\rangle = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{5}$$

Podemos escribirlo de forma más explícita con los vectores separados, **nótese, que es importante, que los componentes λ_i dependen de la base**. Así nos queda:

$$|\psi\rangle = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots \tag{6}$$

¿Qué sucede cuando vemos $A|\psi\rangle$? Pues...

$$A|\psi\rangle = \lambda_1 A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda_2 A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots = \lambda_1 A|1\rangle + \lambda_2 A|2\rangle + \dots \tag{7}$$

Podemos escribir entonces la descomposición de cada uno de estos vectores de la base, esto nos dará (escrito con la notación de álgebra lineal de plan común):

$$A|j\rangle = \sum_{i\in I} a_{ij} |j\rangle = \sum_{i\in I} a_{ij} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{Sólo 1 en la posición } j \text{ , 0 en las demás.}} = a_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + a_{2j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{8}$$

Así, podemos escribir $A|\psi\rangle$ como sigue:

$$A|\psi\rangle = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots \tag{9}$$

Y luego viene la genial idea de escribir estos vectores imágenes de la base, como si estuvieran juntos, ahí surge la notación matricial del curso de álgebra lineal que conocíamos de antes. Podríamos pensar que cada componente de $|\psi\rangle$ es una ponderación de cada vector imágen de la base, entonces queda algo como:

$$A|\psi\rangle = \begin{array}{c} \begin{matrix} \color{red}{\lambda_1} & \color{blue}{\lambda_2} & \dots \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & \color{blue}{a_{12}} & \dots \\ \color{red}{a_{21}} & \color{blue}{a_{22}} & \dots \\ \color{red}{\vdots} & \color{blue}{\vdots} & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \tag{10}$$

Entonces podemos escribir de forma más cómoda, escribiendo $|\psi\rangle$ en la forma anterior al lado derecho, dejandonos también una bonita forma de ver cómo se puede representar A en una base dada:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \implies A|\psi\rangle = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{Representación matricial de } A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{Representación de } |\psi\rangle} \tag{11}$$

Con esto vemos como podemos escribir un operador en una base determinada, nótese que esto no requiere que la base sea ortonormal o nada parecido, sólo que sea base (ie, que todo vector se pueda escribir de forma única como combinación lineal de elementos de la base). Eso sí, esta formulación, como vieron en clases, tiene un problema **los coeficientes dependen de la base**, y usualmente no queda explícito que base se está usando para este propósito, por esto se hace necesario crear y usar la notación $\langle bra|ket\rangle$, ya que explicita con qué vectores abstractos se están trabajando.

Entonces si tenemos una base $|1\rangle$, $|2\rangle$ y $|3\rangle$ y nos dicen que un operador funciona como:

$$\begin{aligned} A|1\rangle &= \quad b|1\rangle \\ A|2\rangle &= -ib|3\rangle \\ A|3\rangle &= \quad ib|2\rangle \end{aligned} \tag{12}$$

Entonces de forma matricial podríamos ver que la primera columna se escribiría como un vector columna que tiene un b en la primera coordenada, y las otras dos 0, en la segunda fila tendría un $-ib$ en la tercera coordenada y 0 en las demás, y la tercera fila tendría un valor ib en la segunda coordenada y 0 en las demás, algo de la pinta:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib \\ 0 & -ib & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Ante todo esto pueden surgir preguntas interesantes, como por ejemplo:

P1 ¿Cómo se obtienen dichos coeficientes?

P2 ¿Cómo traducir esto a la forma de escribir los operadores con los $|i\rangle\langle j|$?

P3 ¿Cómo se puede escribir un producto interno con esto?

P4 ¿Cómo será una fórmula explícita, a punta de braketeo, en una base ortonormal?

P5 ¿Cómo quedaría escrita la identidad en el caso de una base que no sea ortonormal?