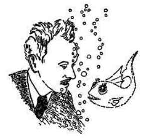
Mecánica Cuántica
Luis Foà



Joaquín Márquez
Amaru Moya

Auxiliar 1: Empezando con el formalismo matemático (clickéame!)

P1 ¿Y esto por qué?

a) De su curso de física moderna aprendió la mecánica cuántica a *la vieja usanza*, correspondiente a trabajar directamente con la función de onda. Ahora en el curso enfocado justamente a mecánica cuántica, se nos propone una nueva metodología al respecto ¿Porqué cree que esto es deseable?

b) ¿Y porqué podrían convenir números complejos al trabajar con estas magnitudes?

P2 Doble rendija, interferencia y superposición.

En esta pregunta examinaremos el experimento de la doble rendija, pero simplificado para tener una idea conceptual: Del electromagnetismo se obtiene que al medir la intensidad del campo eléctrico, obtenemos una magnitud de la forma $I \propto |E|^2$, asumiremos por mera facilidad numérica del problema que $I = |E|^2$[1]. Podemos considerar entonces que en un punto fijo al otro lado del experimento de la doble rendija, podemos tener que, si tiramos difractada sólo desde un rendija, una solución sinusoidal de la forma:

$$E = E_0 \sin(\omega t)$$

Si consideramos que tenemos dos rendijas a la vez, separadas espacialmente, entonces la onda sinusoidal vista será la misma pero trasladada, esto se puede lograr agregando una diferencia de fase ϕ para la traslación y cambiar E_1 por E_2 para representar el decaimiento de la radiación por la distancia:

$$\begin{aligned} E(R_1) =& E_1 \sin(\omega t) && \text{Campo eléctrico por luz de la rendija 1} \\ E(R_2) =& E_2 \sin(\omega t + \phi) && \text{Campo eléctrico por luz de la rendija 2} \end{aligned}$$

a) Considere que sólo hay una rendija ¿Cuanta es la intensidad producida en ese punto en concreto según el caso? Vea que pasa si esa rendija es R_1 y que pasa si esa rendija es R_2.

b) Considere ahora que están activas las dos rendijas porque viene una onda plana desde lejos, ¿Cuánto es la intensidad medida ahora? ¿Es la suma de las intensidades anteriores?

c) Calcule la cantidad $\langle a+b|a+b\rangle$, ¿Ve alguna similitud con el desarrollo anterior?

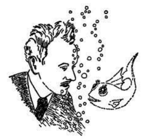
P3 Un poco sobre notación bra-ket Considere la siguiente matriz y los siguientes vectores representados mediante una base dada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Considere que $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, escriba entonces A, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con notación braket en términos de $|1\rangle$ y $|2\rangle$.

b) Considere ahora $|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$ y $|4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$, escriba A, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en términos de $|3\rangle$ y $|4\rangle$.
Hint: Trabaje con la parte anterior

[1] La constante de proporcionalidad son cosas relacionadas a la permitividad, velocidad de la luz, etc. Esto vine de que la intensidad de energía radiada es potencia en unidad de área.



P4 Matraqueo teórico

a) Un truco usual, sobre todo al principio, es poner una identidad conveniente. Demuestre que, si $\{|i\rangle\}_i$ es una base, entonces la identidad se puede escribir como:

$$I = \sum_i |i\rangle \langle i|$$

b) Se puede calcular la traza de una matriz con la suma:

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{|i\rangle \in \text{Base}} \langle i| A |i\rangle$$

Muestre que esto es independiente de la base, es decir, que si $\{|i\rangle\}_i$ y $\{|j\rangle\}_j$ son dos bases distintas, entonces:

$$\sum_{|i\rangle \in \text{Base 1}} \langle i| A |i\rangle = \sum_{|j\rangle \in \text{Base 2}} \langle j| A |j\rangle$$

Resumen $\langle$Bra$|$Ket$\rangle$

- Un vector de un espacio vectorial se representa con Dirac como un $|\psi\rangle$, estos se pueden sumar y ponderar entre sí.
- El equivalente a un vector traspuesto a un $|\psi\rangle$ es su bra, que se escribe $\langle\psi|$, y en el equivalente de álgebra lineal de plan común correspondería al traspuesto conjugado, a dicha operación se le llama tomar el adjunto (o el dagado) y se denota por $(\cdot)^\dagger$. La trasnformación sigue las siguientes reglas si $|a\rangle$ y $|b\rangle$ son *kets*, c es un escalar complejo y c^* es el conjugado de c:
  - $(|a\rangle)^\dagger = \langle a|$
  - $(|a\rangle + |b\rangle)^\dagger = \langle a| + \langle b|$.
  - $(c\,|a\rangle)^\dagger = c^* \langle a|$.
- Si se junta un bra $\langle a|$ con un ket $|b\rangle$ (en ese orden) se obtiene un número (son como legos, se crearon para juntarse en un determinado orden). Esto se escribe $\langle a|b\rangle$. Esto posee las siguientes propiedades:
  - Lineal en los kets (saca constantes y separa sumas).
  $$\langle a|b + \lambda c\rangle = \langle a|b\rangle + \lambda \langle a|c\rangle$$
  - Antilineal en los bras (saca las constantes conjugadas y separa las sumas).
  $$\langle a + \lambda b|c\rangle = \langle a|c\rangle + \lambda^* \langle b|c\rangle$$
  - Es definido positivo, es decir $\langle a|a\rangle \geq 0$ y si $\langle a|a\rangle = 0$, entonces $|a\rangle$ es el ket nulo.

  Esto hace que la operación de tomar un braketeo entre dos kets describa un producto interno.
- La norma de un ket $|a\rangle$ es la raíz cuadrada de su producto consigo mismo, esto es $\sqrt{\langle a|a\rangle}$.
- Se dice que un $|a\rangle$ está normalizado si $\langle a|a\rangle = 1$
- Si se escribe un ket y luego un bra, como $|a\rangle\langle b|$, entonces esto significa que es un operador, que al recibir un ket $|c\rangle$, entonces devuelve el $|a\rangle$ pero escalado por $\langle b|c\rangle$, la imagen mental se puede ver como:
  $$(|a\rangle\langle b|)\,|c\rangle = |a\rangle\langle b|c\rangle = \langle b|c\rangle\,|a\rangle$$
  (Idea, seguir con la imagen de los legos)
- Un conjunto de kets se dice base si existe una única manera de escribir cualquier vector del espacio en el que estamos trabajando, como combinación lineal de estos.
- Una base $\{|i\rangle\}_i$ se dice ortogonal si para cualquier par de kets $|i\rangle$ y $|j\rangle$ en la base, $|i\rangle \neq |j\rangle$ implica que $\langle i|j\rangle = 0$.
- Una base $\{|i\rangle\}_i$ Se dice ortogonal si para cualquier ket $|i\rangle$, se tiene que $\langle i|i\rangle = 1$ (es decir, cada vector de la base está normalizado).
- Se dice que una base es ortonormal si es ortogonal y ortonormal, esto se puede escribir con un δ de kroneker como:
  $$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
  Para $|i\rangle$ y $|j\rangle$ en la base ortonormal.