Auxiliar 14

Variables de acción-ángulo

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.-

Una partícula de masa m y energía E se mueve en una dimensión en presencia del potencial

$$V(x) = a\,\mathrm{cosec}^2\left(\frac{x}{x_0}\right),$$

donde a y x_0 son constantes conocidas.

a) Obtenga una expresión integral para la función característica del Hamiltoniano

b) ¿Bajo qué condiciones se pueden usar variables de acción-ángulo?

c) Asuma que se cumplan esas condiciones, encuentre la frecuencia de oscilación como función de la energía utilizando el método de acción-ángulo

d) Compruebe su resultado en (c) usando el límite de pequeñas oscilaciones

P2.- **Oscilador tridimensional**

Considere un oscilador armónico tridimensional de masa m y constantes elásticas distintas k_1, k_2, k_3 en las $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ direcciones.

a) Usando separación de variables e introduciendo variables de acción-ángulo $J_{1,2,3}$ y $w_{1,2,3}$, encuentre las frecuencias del oscilador. Utilice su conocimiento de la solución de las variables acción-ángulo para un oscilador armónico 1D

b) La conección de (w_i, J_i) con las variables originales (x_i, p_i) es obtenida con la generalización directa del resultado 1D:

$$x = \left(\frac{J}{\pi\sqrt{km}}\right)^{1/2}\sin(2\pi w), \qquad p = \left(\frac{J\sqrt{km}}{\pi}\right)^{1/2}\cos(2\pi w)\,.$$

Verifique usando corchetes de Poisson que sus variables acción-ángulo (w_i, J_i) de la parte (a) son variables canónicas, o sea que

$$[J_i, J_j]_{p,q} = 0, \quad [w_i, w_j]_{p,q} = 0, \quad [J_i, w_j]_{p,q} = \delta_{ij}$$

Formulario

Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema con s grados de libertad y con Hamiltoniano H, es

$$H\left(q_i, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,,$$

que es una EDP de primer orden, donde se busca calcular S (la función generadora) que tiene dependencia

$$S = S(q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s; t) = F_2(q, P, t)\,,$$

donde $\alpha_i = P_i$ son los momentums transformados (y que son constantes).
Habiendo calculado S hacemos:

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\,.$$

Con estas últimas s ecuaciones podemos despejar las coordenadas q en función de los α y β (las constantes de movimiento).

Variables de acción-ángulo

Para un movimiento periódico se pueden calcular las llamadas **variables de acción**

$$J_i \equiv \oint p_i \,\mathrm{d}q_i = \oint \frac{\partial W_i}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i$$

y las **variables de ángulo**

$$w_i \equiv \frac{\partial W_i}{\partial J_i}\,,$$

donde W_i es la función característica, proveniente del método de separación de variables, asociada a la coordenada q_i.

A partir de las variables de acción se pueden calcular las frecuencias de oscilación como

$$\nu_i \equiv \frac{\partial H}{\partial J_i}\,.$$