

Auxiliar 13

Hamilton-Jacobi y Variables de acción-ángulo

Profesor: Fernando Lund

Auxiliar: Javier Huenupi

Ayudante: P. Joaquín

P1.- Scattering

Utilizando Hamilton-Jacobi, escriba el movimiento de una partícula deflectada en presencia de un potencial $U(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}/r^3$. Exprese la ecuación de la trayectoria en término de cuadraturas; exprésela analíticamente para el caso cuando $E\rho^2 \gg a$, donde ρ es el parámetro de impacto. Considere que antes del *scattering* la velocidad de la partícula es paralela al vector $-\mathbf{a}$

P2.- Pozo de potencial

Una partícula de masa m se mueve en un plano en presencia de un pozo de potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \text{ o } x > x_0 \\ -V_0, & \text{si } 0 \leq x \leq x_0. \end{cases}$$

- ¿Bajo qué condiciones el método de variables de acción-ángulo puede ser aplicado?
- Asumiendo que dichas condiciones se cumplen, use el método de variables de acción-ángulo para encontrar las frecuencias de movimiento

Formulario

Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema con s grados de libertad y con Hamiltoniano H , es

$$H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

que es una EDP de primer orden, donde se busca calcular S (la función generadora) que tiene dependencia

$$S = S(q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s; t) = F_2(q, P, t),$$

donde $\alpha_i = P_i$ son los momentums transformados (y que son constantes).

Habiendo calculado S hacemos:

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}.$$

Con estas últimas s ecuaciones podemos despejar las coordenadas q en función de los α y β (las constantes de movimiento).

Variables de acción-ángulo

Para un movimiento periódico se pueden calcular las llamadas **variables de acción**

$$J_i \equiv \oint p_i dq_i$$

y a partir de estas se pueden calcular las frecuencias de oscilación como

$$\nu_i \equiv \frac{\partial H}{\partial J_i}.$$