Auxiliar 12

Transformaciones infinitesimales y Hamilton-Jacobi

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- Oscilador armónico con Hamilton-Jacobi

Muestre que la función

$$S = \frac{m\omega}{2}\left(q^2 + \alpha^2\right)\cot(\omega t) - m\omega q\alpha \operatorname{cosec}(\omega t)$$

es solución de Hamilton-Jacobi para la función principal de Hamilton del oscilador armónico lineal con

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right).$$

Muestre que esta función genera una solución correcta para el movimiento del oscilador armónico.

P2.- Transformación infinitesimal

Determine las transformaciones canónicas que son resultado de las siguientes funciones generadoras:

a) $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{P} + \delta\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}$ con $\delta\mathbf{a}$ una distancia pequeña

b) $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{P} + \delta\theta L_z(\mathbf{r}, \mathbf{P})$ con $L_z = xP_y - yP_x$ y $\delta\theta$ un ángulo pequeño

c) $\Phi(q, P) = qP + \delta\tau H(q, P, t)$ con H el Hamiltoniano y $\delta\tau$ un intervalo de tiempo pequeño

Formulario

Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema con s grados de libertad y con Hamiltoniano H, es

$$H\left(q_i, \ldots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,,$$

que es una EDP de primer orden, donde se busca calcular S (la función generadora) que tiene dependencia

$$S = S(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s; t) = F_2(q, P, t)\,,$$

donde $\alpha_i = P_i$ son los momentums transformados (y que son constantes).
Habiendo calculado S, las coordenadas transformadas se calculan como

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\,.$$

Con estas últimas s ecuaciones podemos despejar las coordenadas q en función de los α y β (las constantes de movimiento).