Auxiliar 11

Hamiltoniano III: Corchete de Poisson

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- A un paso de la mecánica cuántica

a) Determine los corchetes de Poisson entre las componentes cartesianas del momentum $\mathbf{p}$ y el momentum angular $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ de una partícula.

b) Determine los corchetes de Poisson entre las componentes del momentum angular $\mathbf{M}$

P2.- Demostración intermedia

Demuestre que $[\phi, M_z] = 0$, donde ϕ es cualquier función, que sea esféricamente simétrica con respecto al origen, de las coordenadas (posición) y momentum de una partícula.

Hint: Argumente cuál es la dependencia de ϕ para que cumpla que tenga simetría esférica

P3.- Grupos de simetría

Considere un oscilador armónico isotrópico de 2 dimensiones, que en coordenadas cartesianas el Hamiltoniano está dado por:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + m^2\omega^2 x^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y^2 + m^2\omega^2 y^2\right)$$

a) En una primera instancia, ¿qué cantidades conservadas logra identificar?

b) Busque definir una matriz $\mathbf{A}$, 2-dimensional, que contenga las constantes de movimiento del problema expresadas en función de las coordenadas x_i y los momentum p_i. Recuerde lo demostrado en la Pregunta anterior

c) Escriba las soluciones de x e y en función del tiempo y elementos de A_{ij}

d) Defina las cantidades

$$S_1 \equiv \frac{A_{12} + A_{21}}{2\omega}, \qquad S_2 \equiv \frac{A_{22} - A_{11}}{2\omega}, \qquad S_3 \equiv \frac{M_z}{2}$$

¿también serían constantes de movimiento?

e) Calcule la suma $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$

f) Encuentre los corchetes de Poisson entre estos elementos S_i

$$[S_i, S_j] = \dots$$

Discuta su resultado

Formulario

Corchete de Poisson

El corchete de Poisson entre las variables f y g se define como

$$[f, g] = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right),$$

(**ojo** con el orden). Algunas propiedades básicas son:

$$\begin{gathered} [f, g] = -[g, f] \\ [f, c] = 0 \\ [f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g] \\ [f_1 f_2, g] = f_1[f_2, g] + f_2[f_1, g]\,, \end{gathered}$$

con c una constante.

Constantes de movimiento

Sea f una integral de movimiento (constante de movimiento) y H el Hamiltoniano del sistema, se debe cumplir

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0\,,$$

y si, además, f no depende explícitamente del tiempo

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow [f, H] = 0$$

Auxiliar 11

P1

a) Usaremos los siguientes corchetes:

- $$[q_i, q_j] = \sum_k \left(\overset{=0\,\forall i,k}{\cancel{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \overset{\forall j,k}{\cancel{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}} \right) = 0$$

- $$[p_i, p_j] = \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial p_k} \overset{=0\,\forall j,k}{\cancel{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}} - \overset{=0\,\forall i,k}{\cancel{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} \right) = 0$$

- $$[p_i, q_j] = \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial p_k} \overset{=\delta_{jk}}{\cancel{\frac{\partial q_j}{\partial q_k}}} - \cancel{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}} \overset{=0}{\cancel{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}} \right) = \sum_k \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \delta_{jk} = \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij}$$

entonces los corchetes entre $\vec{M}$ y $\vec{p}$ en forma general son:

- $[M_i, p_j] = [\epsilon_{ikl}\, x_k p_l, p_j] = \epsilon_{ikl} [x_k p_l, p_j]$ $\quad [f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g]$ propiedad

$$= \epsilon_{ikl} \left(x_k \overset{=0\,\forall l,j}{\cancel{[p_l, p_j]}} + p_l \underset{=-\delta_{jk}}{\cancel{[x_k, p_j]}} \right)$$

$$= -\epsilon_{ikl}\, p_l\, \delta_{jk}$$

$$= -\epsilon_{ijl}\, p_l$$

b) $[M_a, M_b] = [\epsilon_{aij} x_i p_j, \epsilon_{bkl} x_k p_l]$

$$= \epsilon_{aij}\epsilon_{bkl} [x_i p_j, x_k p_l]$$

$$= \epsilon_{aij}\epsilon_{bkl} \left(x_i [p_j, x_k p_l] + p_j [x_i, x_k p_l] \right)$$

$$= \epsilon_{aij}\epsilon_{bkl} \left\{ -x_i \left(x_k \overset{=0\,\forall l,j}{\cancel{[p_l, p_j]}} + p_l \overset{=-\delta_{jk}}{\cancel{[x_k, p_j]}} \right) - p_j \left(x_k \overset{=\delta_{li}}{\cancel{[p_l, x_i]}} + p_l \overset{=0\,\forall k,i}{\cancel{[x_k, x_i]}} \right) \right\}$$

$$= \epsilon_{aij}\epsilon_{bkl} \left(x_i p_l \delta_{jk} - p_j x_k \delta_{li} \right)$$

$$= \epsilon_{aij}\epsilon_{bkl} \delta_{jk} x_i p_l - \epsilon_{aij}\epsilon_{bkl} \delta_{li} p_j x_k$$

$$= \epsilon_{aij}\epsilon_{bjl} x_i p_l - \epsilon_{aij}\epsilon_{bki} p_j x_k$$

$$= -\epsilon_{aij}\epsilon_{blj} x_i p_l + \epsilon_{aji}\epsilon_{bki} p_j x_k$$

contracción levi civitas

$$= -(\delta_{ab}\delta_{il} - \delta_{al}\delta_{ib}) x_i p_l + (\delta_{ab}\delta_{jk} - \delta_{ak}\delta_{jb}) p_j x_k$$

$$= -\delta_{ab} \cancel{x_i p_i} + x_b p_a + \delta_{ab} \cancel{p_j x_j} - p_b x_a$$

$$= -x_a p_b + x_b p_a$$

reescribimos

$$= -\underbrace{(\delta_{aj}\delta_{bk} - \delta_{bj}\delta_{ak})}_{\text{levi civita contraído}} x_j p_k$$

$$= -\epsilon_{abi}\,\epsilon_{jki}\, x_j\, p_k$$

2 permutaciones

$$= -\epsilon_{abi}\,\epsilon_{ijk}\, x_j\, p_k$$

$$= -\epsilon_{abi}\, M_i$$

P2

Si ϕ es simétrico c/r al origen en sus variables $\vec{r}$ y $\vec{p}$, su dependencia en estas variables debe ser como $\vec{r}^2$, $\vec{p}^2$ y $\vec{r}\cdot\vec{p}$. Esto ya que ϕ debe ser invariante ante rotaciones, así que sea

$$\vec{r}\,' = R\vec{r} \quad \wedge \quad \vec{p}\,' = R\vec{p}$$

con R una rotación cualquiera, entonces

- $\vec{r}\,'^2 = \vec{r}\,'^T\vec{r}\,' = (R\vec{r})^T(R\vec{r}) = \vec{r}^T R^T R\vec{r} = \vec{r}^T \mathbb{1}_{3\times3}\vec{r} = \vec{r}^T\vec{r} = \vec{r}^2$

y lo mismo para $\vec{p}\,'^2 = \vec{p}^2$ y $\vec{r}\,'\cdot\vec{p}\,' = \vec{r}\cdot\vec{p}$.

Por lo tanto $\phi = \phi(r^2, p^2, \vec{r}\cdot\vec{p})$, así que calculamos el corchete con M_z

$$[\phi, M_z] = \sum_k \left(\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\frac{\partial M_z}{\partial q_k} - \frac{\partial\phi}{\partial q_k}\frac{\partial M_z}{\partial p_k} \right)$$

- $\dfrac{\partial\phi}{\partial p_k} = \dfrac{\partial\phi}{\partial(p^2)}\dfrac{\partial p^2}{\partial p_k} + \dfrac{\partial\phi}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}\dfrac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\partial p_k} = \dfrac{\partial\phi}{\partial(p^2)}2p_k + \dfrac{\partial\phi}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}q_k$

- $\dfrac{\partial M_z}{\partial p_k} = \dfrac{\partial}{\partial p_k}(xp_y - yp_x) = x\dfrac{\partial p_y}{\partial p_k} - y\dfrac{\partial p_x}{\partial p_k} = x\delta_{yk} - y\delta_{xk}$

- $\dfrac{\partial\phi}{\partial q_k} = \dfrac{\partial\phi}{\partial(q^2)}2q_k + \dfrac{\partial\phi}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}p_k$

- $\dfrac{\partial M_z}{\partial q_k} = p_y\delta_{xk} - p_x\delta_{yk}$

$$\Rightarrow [\phi, M_z] = \sum_k \left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial(p^2)}2p_k + \frac{\partial\phi}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}q_k\right)(p_y\delta_{xk} - p_x\delta_{yk}) - \left(\frac{\partial\phi}{\partial(q^2)}2q_k + \frac{\partial\phi}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}p_k\right)(x\delta_{yk} - y\delta_{xk}) \right\}$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial(p^2)}2(\cancel{p_xp_y - p_xp_y}) + \frac{\partial\phi}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}(xp_y - yp_x)$$

se cancelan

$$- \frac{\partial\phi}{\partial(p^2)}2(\cancel{xy - xy}) - \frac{\partial\phi}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}(xp_y - yp_x)$$

$$= 0$$

P3

Tenemos el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + m^2\omega^2 x^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y^2 + m^2\omega^2 y^2\right)$$

a) Es claro que como H no depende explícitamente del tiempo $\partial_t H = 0$ y como $\partial_t H = dH/dt$ entonces la energía del sist. se conserva.

Además tenemos que $H = H(p_x^2, p_y^2, x^2, y^2)$, así que por P2

$$[H, M_z] = 0$$

así que M_z también es una cte. de movimiento

b) Tenemos que $\frac{1}{2m}(p_x^2 + m^2\omega^2 x^2)$ y $\frac{1}{2m}(p_y^2 + m^2\omega^2 y^2)$ son cte. de mov (conmutan con H) y equivaldrían a las energías, independientes, del movimiento en cada eje

$$E = E_x + E_y$$

entonces proponemos que las otras ctes. de mov. tienen una forma muy similar

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}\left(p_i p_j + m^2\omega^2 x_i x_j\right) \Rightarrow [A] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

ya que conmutan con el Hamiltoniano

$$[A_{12}, H] \propto [p_x p_y + m^2\omega^2 xy,\ p_x^2 + m^2\omega^2 x^2 + p_y^2 + m^2\omega^2 y^2]$$

$$= [p_x p_y,\ p_x^2 + p_y^2 + m^2\omega^2(x^2+y^2)] + m^2\omega^2[xy,\ p_x^2 + p_y^2 + m^2\omega^2(x^2+y^2)] = \ldots = 0$$

c) Las ecs. de Hamilton son

- $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$
- $\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m} = -\omega^2 x \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \phi_1) \Rightarrow p_x(t) = -m\omega A\sin(\omega t + \phi_1) \quad (1)$$

donde consideramos A y ϕ_1 desconocidos. Para y hacemos lo mismo

$$\Rightarrow y(t) = B\cos(\omega t + \phi_2) \Rightarrow p_y(t) = -m\omega B\sin(\omega t + \phi_2) \quad (2)$$

Entonces, sabemos que A_{ij} son ctes. en el tiempo, iguales a su condición inicial, por ej. A_{11}

$$A_{11} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + m^2\omega^2 x^2\right) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2(t=0) + m^2\omega^2 x^2(t=0)\right)$$

usando (1) en $t=0$

$$\Rightarrow A_{11} = \frac{1}{2m}\left(m^2\omega^2 A^2 \sin^2\phi_1 + m^2\omega^2 A^2 \cos^2\phi_2\right) = \frac{m\omega^2}{2} A^2 \quad \therefore A = \sqrt{\frac{2A_{11}}{m\omega^2}}$$

hacemos lo mismo para A_{22} y obtenemos

$$B = \sqrt{\frac{2A_{22}}{m\omega^2}} \qquad \therefore A_{11}, A_{22} \text{ nos indican las amplitudes de oscilación}$$

Ahora, para $A_{12} = A_{21} = \frac{1}{2m}\left(p_x p_y + m^2\omega^2 xy\right)$ evaluamos

$$A_{12} = A_{21} = \frac{1}{2m}\left(m^2\omega^2 AB \sin\phi_1 \sin\phi_2 + m^2\omega^2 AB \cos\phi_1 \cos\phi_2\right)$$

$$= \frac{m\omega^2}{2} AB \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$= \frac{m\omega^2}{2} \frac{2\sqrt{A_{11}A_{22}}}{m\omega^2} \cos(\phi_1 - \phi_2) = \sqrt{A_{11}A_{22}} \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\therefore \phi_1 - \phi_2 = \arccos\left(\frac{A_{12}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}}\right) = \arccos\left(\frac{A_{21}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}}\right)$$

así que $A_{12} = A_{21}$ nos indica la diferencia de fase de las oscilaciones en cada eje

$$\therefore x(t) = \sqrt{\frac{2A_{11}}{m\omega^2}} \cos(\omega t + \phi_1) \quad \wedge \quad y(t) = \sqrt{\frac{2A_{22}}{m\omega^2}} \cos(\omega t + \phi_2)$$

donde $\phi_1 = \phi_1(A_{12} = A_{21})$, $\phi_2 = \phi_2(A_{12} = A_{21})$

d) Definimos las ctes. mencionadas

- $S_1 \equiv \frac{A_{12} + A_{21}}{2\omega} = \frac{1}{2m\omega}\left(p_x p_y + m^2\omega^2 xy\right)$
- $S_2 \equiv \frac{A_{22} - A_{11}}{2\omega} = \frac{1}{4m\omega}\left[p_y^2 - p_x^2 + m^2\omega^2(y^2 - x^2)\right]$
- $S_3 \equiv \frac{M_z}{2} = \frac{1}{2}\left(xp_y - yp_x\right)$

que siguen siendo ctes. de movimiento, ya que están formados por sumas de ctes. de mov.

e) Calculamos la suma

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{1}{4m^2\omega^2}\left(p_x^2 p_y^2 + 2m^2\omega^2 p_x p_y xy + m^4\omega^4 x^2 y^2\right)$$

$$+ \frac{1}{16m^2\omega^2}\left((p_y^2 - p_x^2)^2 + 2m^2\omega^2(p_y^2 - p_x^2)(y^2 - x^2) + m^4\omega^4(y^2 - x^2)^2\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(x^2p_y^2-2p_xp_y\,xy+y^2p_x^2\right)$$

$$=\ldots=\frac{H^2}{4\omega^2}$$

f) Calculando $[S_1,S_2]$, $[S_1,S_3]$ y $[S_2,S_3]$ nos basta para encontrar la relación general que es de la forma

$$[S_i,S_j]=i\epsilon_{ijk}S_k$$