Auxiliar 11

Hamiltoniano III: Corchete de Poisson

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- A un paso de la mecánica cuántica

a) Determine los corchetes de Poisson entre las componentes cartesianas del momentum $\mathbf{p}$ y el momentum angular $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ de una partícula.

b) Determine los corchetes de Poisson entre las componentes del momentum angular $\mathbf{M}$

P2.- Demostración intermedia

Demuestre que $[\phi, M_z] = 0$, donde ϕ es cualquier función, que sea esféricamente simétrica con respecto al origen, de las coordenadas (posición) y momentum de una partícula.
Hint: Argumente cuál es la dependencia de ϕ para que cumpla que tenga simetría esférica

P3.- Grupos de simetría

Considere un oscilador armónico isotrópico de 2 dimensiones, que en coordenadas cartesianas el Hamiltoniano está dado por:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + m^2\omega^2 x^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y^2 + m^2\omega^2 y^2\right)$$

a) En una primera instancia, ¿qué cantidades conservadas logra identificar?

b) Busque definir una matriz $\mathbf{A}$, 2-dimensional, que contenga las constantes de movimiento del problema expresadas en función de las coordenadas x_i y los momentum p_i. Recuerde lo demostrado en la Pregunta anterior

c) Escriba las soluciones de x e y en función del tiempo y elementos de A_{ij}

d) Defina las cantidades

$$S_1 \equiv \frac{A_{12} + A_{21}}{2\omega}\,, \qquad S_2 \equiv \frac{A_{22} - A_{11}}{2\omega}\,, \qquad S_3 \equiv \frac{M_z}{2}$$

¿también serían constantes de movimiento?

e) Calcule la suma $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$

f) Encuentre los corchetes de Poisson entre estos elementos S_i

$$[S_i, S_j] = \dots$$

Discuta su resultado

Formulario

Corchete de Poisson

El corchete de Poisson entre las variables f y g se define como

$$[f, g] = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right),$$

(**ojo** con el orden). Algunas propiedades básicas son:

$$\begin{aligned} [f, g] &= -[g, f] \\ [f, c] &= 0 \\ [f_1 + f_2, g] &= [f_1, g] + [f_2, g] \\ [f_1 f_2, g] &= f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g]\,, \end{aligned}$$

con c una constante.

Constantes de movimiento

Sea f una integral de movimiento (constante de movimiento) y H el Hamiltoniano del sistema, se debe cumplir

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0\,,$$

y si, además, f no depende explícitamente del tiempo

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow [f, H] = 0$$