

Auxiliar 10

Hamiltoniano II

Profesor: Fernando Lund

Auxiliar: Javier Huenupi

Ayudante: P. Joaquín

P1.- Movimiento armónico

Determine las transformaciones canónicas definidas por las siguientes funciones generadoras:

- a) Escriba las ecuaciones de movimiento para un oscilador armónico con frecuencia $\omega(t)$, en función de las variables Q y P , usando la función generadora

$$F(q, Q, t) = \frac{1}{2}m\omega(t)q^2 \cot Q$$

- b) Escriba las ecuaciones de movimiento para un oscilador armónico (con ω constante) sobre el cual actúa una fuerza externa $f(t)$, en función de Q y P , usando la función generadora

$$F(q, Q, t) = \frac{1}{2}m\omega \left[q - \frac{f(t)}{m\omega^2} \right] \cot Q$$

P2.- Oscilador anarmónico, again

Considere pequeñas oscilaciones para un oscilador anarmónico cuyo Hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2) + \alpha x^3 + \beta x p^2$$

bajo la condición que $|\alpha x| \ll \omega^2$. $|\beta x| \ll 1$. Encuentre los parámetros a y b para la transformación canónica producida por la función generadora

$$\Phi = xP + ax^2P + bP^3$$

tal que el nuevo Hamiltoniano no contenga ningún término anarmónico a primer orden en $\alpha\omega^{-2}Q$ y βQ . Encuentre $x(t)$

Formulario

Ecuaciones de Hamilton

A partir de un Lagrangiano L en función de las coordenadas y velocidades, q_i , $\dot{q}_i$, los momentum conjugados se calculan como

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

A partir de los momentum, el Hamiltoniano H del sistema se calcula como

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L,$$

donde los $\dot{q}_i$ se expresan función de los momentum $\{p_j\}$.

El similitud de las ecuaciones de Euler-Lagrange de mecánica Lagrangiana, en mecánica Hamiltoniana son las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \wedge \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Las cuatro transformaciones canónicas básicas son:

$$\begin{aligned} F = F_1(q, Q, t) &\Rightarrow p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad \wedge \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i &\Rightarrow p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad \wedge \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \\ F = F_3(p, Q, t) + q_i p_i &\Rightarrow q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad \wedge \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \\ F = F_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i &\Rightarrow q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad \wedge \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \end{aligned}$$