Auxiliar 7

Diagramas de fase, ciclos límites y bifurcaciones

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- Estabilidad 1D

Utilice diagramas de fase para encontrar los puntos fijos y estudiar su estabilidad, para los siguientes casos:

a) $\dot{x} = f(x)$, con $f(x)$ una función cualquiera

b) $\dot{x} = x^2 - 1$

c) $\dot{x} = x - \cos x$

P2.- Bifurcaciones

Estudie cómo emergen puntos fijos y cómo cambia su estabilidad para los siguientes casos

a) Saddle-Node: $\dot{x} = \mu + x^2$

b) Saddle-Node: $\dot{x} = \mu - x - e^{-x}$

c) Pitchfork: $\dot{x} = \mu x - x^3$

Para esto utilice diagramas de bifurcación y encuentre los valores de μ que generan la bifurcación en cada caso

P3.- Péndulo no lineal

Considere la EoM que describe un péndulo simple

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0\,.$$

Sin aproximar el término trigonométrico, separe la ecuación en dos EDOs de primer orden de la forma

$$\dot{x} = f(x, y)$$
$$\dot{y} = f(x, y)\,,$$

donde x, y **no son las coordenadas cartesianas del sistema**. Encuentre los equilibrios del sistema y el comportamiento en el espacio de fases para distintas condiciones iniciales.

P4.- Ciclo límite

Considere un problema donde la masa inercial m de una partícula es despreciable frente a los otros parámetros del problema. Estudie el sistema dado por las siguientes ecuaciones

$$\dot{x} = \mu x - \omega y - x(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = \omega x + \mu y - y(x^2 + y^2)\,,$$

donde ahora sí x, y son las coordenadas cartesianas de la partícula.

a) Grafique el campo vectorial $(\dot{x},\, \dot{y}) = (f_1(x, y),\, f_2(x, y))$, donde

$$f_1(x, y) = \mu x - \omega y - x(x^2 + y^2)$$
$$f_2(x, y) = \omega x + \mu y - y(x^2 + y^2)$$

y analice las trayectorias que seguiría la partícula para distintas condiciones iniciales (x_0, y_0) ¿nota alguna tendencia?

b) Con el análisis anterior, transforme este sistema cartesiano a uno en coordenadas polares con

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta\,.$$

Analice el comportamiento de los equilibrios según r para los casos $\mu > 0$ y $\mu < 0$

c) Concluya cuál es el valor de μ que genera la bifurcación

d) Para el caso de existencia de ciclo límite (solución periódica a la que tiende el sistema), calcule el radio de este ciclo

Formulario

Estabilidad para multivariables

Sea un sistema de EDOs dado por la ecuación vectorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\,,$$

con $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto fijo (de equilibrio), para analizar la estabilidad de este definimos $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\eta}$ y expandimos la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\eta})$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\boldsymbol{\eta} + \mathcal{O}(\boldsymbol{\eta}^2) \\ &\approx D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\boldsymbol{\eta}\,,\end{aligned}$$

donde $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ es la matriz Jacobiana

$$D\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\,. \end{pmatrix}$$

Las estabilidades estarán dadas por la ecuación de autovalores

$$\det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - I\lambda) = 0\,.$$

Para el caso de una variable, el análisis se reduce a analizar el signo de $f'(x_0)$ en

$$\dot{\eta}(t) = f'(x_0)\eta(t)\,.$$